

# NÚMEROS REALES

Lo más positivo es sumar. Estudiar es muy positivo: siempre suma.

El conjunto de los números reales, denotado por  $\mathbb{R}$  (o  $\mathbf{R}$ ), es el campo numérico en el que se realizan la mayoría de los trabajos matemáticos. Las *operaciones* algebraicas (con números, con polinomios, con ecuaciones...) se hacen en  $\mathbf{R}$ . Las *operaciones* con funciones (límites, continuidad, derivadas...) se estudian en  $\mathbf{R}$ . Lo mismo pasa con la probabilidad, sus resultados se expresan con números reales.

Los números reales son, básicamente, todos los que has conocido y con los que has trabajado hasta ahora. Son los Naturales, los Enteros, los Racionales (fracciones), los Irracionales (muchas de las raíces); y son todos los números Decimales (con pocas o muchas cifras decimales, repetidas o no).

## 1. Conjuntos numéricos

- El conjunto de los números naturales, denotado por  $\mathbb{N}$  (o  $\mathbf{N}$ ), es

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 17, 18, \dots\}.$$

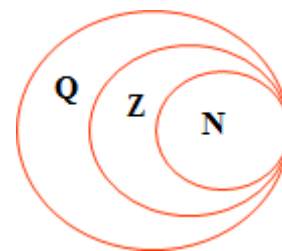
→ El 0 es un *invento* más tardío; algo absolutamente necesario. (Puedes verlo en este [vídeo](#)).

- El conjunto de los enteros, denotado por  $\mathbb{Z}$  (o  $\mathbf{Z}$ ), es

$$\mathbf{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\dots\}.$$

- El conjunto de los números racionales, que se denota por  $\mathbb{Q}$  (o  $\mathbf{Q}$ ), es

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z}; q \neq 0 \right\} \rightarrow \text{Son las fracciones.}$$



→ Cualquier número entero puede ponerse en forma de fracción. Por ejemplo,  $3 = \frac{3}{1} = \frac{12}{4} = \dots$

- Cada uno de estos conjuntos es una ampliación del anterior, así  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ .

La ampliación de los conjuntos numéricos consigue cada vez mayor generalización. En  $\mathbf{Q}$  pueden realizarse las cuatro operaciones elementales, pues todo número racional tiene opuesto, y todo número racional, menos el 0, tiene inverso.

El opuesto de  $\frac{p}{q}$  es  $-\frac{p}{q}$ ; el inverso de  $\frac{p}{q}$  es  $\frac{q}{p}$ .

Así, puede asegurarse que en  $\mathbf{Q}$  tienen solución todas las ecuaciones lineales: las de la forma  $ax + b = c$ . Por ejemplo,  $3x - 5 = 2$ , cuya solución es  $x = 7/3$ .

No obstante, en  $\mathbf{Q}$  todavía no se pueden solucionar ecuaciones tan fáciles como  $x^2 - 2 = 0$  (cuya solución es  $x = \sqrt{2}$ ). Para ello se necesita una nueva ampliación: los números reales.

- Los números irracionales son aquellos números que no pueden ponerse en forma de fracción (como *razón* de dos números enteros).

Por ejemplo, son irracionales los números:  $\sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{7}$ ;  $1,23456\dots$ ;  $\pi$ .

→ Todos los números decimales con un número finito de cifras decimales (llamados *exactos*), o con un número infinito de cifras decimales periódicas, son números racionales: pueden ponerse en

forma de fracción. Así, por ejemplo:  $2,07 = \frac{207}{100}$ ;  $1,333\dots = \frac{4}{3}$ ;  $1,303030\dots = \frac{129}{99}$ .

Existe un proceso que permite encontrar la fracción generatriz de un número periódico. ([Ver](#)).

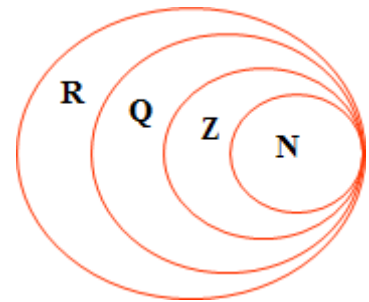
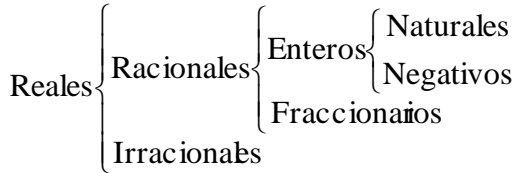
→ Los números irracionales pueden identificarse con números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas. Por ejemplo:  $7,01020304\dots$

**Números reales**

Todos los números anteriores se llaman reales. Por tanto, el conjunto de los reales, **R**, es una sucesiva ampliación de los demás conjuntos numéricos, cumpliéndose que:

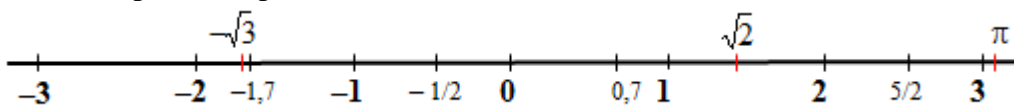
$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R.}$$

El siguiente esquema es más preciso:



**2. La recta real**

Los números reales pueden representarse sobre una recta. Así:



A cada punto de la recta le corresponde un número real; y al revés, a cada número real le corresponde un punto de la recta.

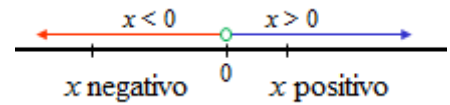
La recta real es “compacta”: no tiene ningún punto vacío, sin rellenar. Entre cada dos números reales siempre hay otro número real. Así, entre 0,65 y 0,66 está, por ejemplo, 0,651. Entre 0,65 y 0,651 está 0,6501... En consecuencia, entre cada dos números reales hay infinitos números reales.

**Orden en R**

El conjunto de los números reales es un conjunto totalmente ordenado. Por tanto, dados dos números reales,  $x$  e  $y$ , se cumple alguna de las desigualdades siguientes:  $x < y$ , o bien,  $y < x$ .

- $x < y$  significa que  $y - x > 0$ .
- $x \leq y$  significa que  $y - x \geq 0$ .

Gráficamente, un número real es mayor que otro si está representado a su derecha. Los números situados a la izquierda del 0 se llaman negativos; los situados a su derecha, positivos.



**Intervalos**

Los intervalos son subconjuntos del conjunto de los números reales, de la recta real.

Intervalo abierto

$(a, b)$  = conjunto de todos los números reales que son mayores que  $a$  y menores que  $b$ .

$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}.$$

Esta expresión matemática debe leerse así: El intervalo abierto

de extremos  $a$  y  $b$  es el conjunto  $x$  de números reales, tales que  $x$  es mayor que  $a$  y menor que  $b$ .



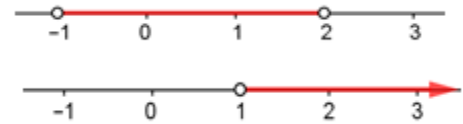
Observaciones:

1. Las llaves,  $\{ \}$ , se utilizan para designar un conjunto de objetos.
2. El símbolo  $\in$  se lee pertenece:  $x \in \mathbf{R}$  significa que  $x$  pertenece a **R**, que  $x$  es un número real.
3. El símbolo  $\mid$  se lee tal que.
4. La expresión  $(a, b)$ , que aquí designa un intervalo abierto (siendo siempre  $a < b$ ), también se utiliza para indicar un punto del plano. Por ejemplo, los puntos  $O(0, 0)$ ,  $P(-1, 2)$ ,  $Q(2, -4)$ .

**Ejemplos:**

$$(-1, 2) = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x < 2\};$$

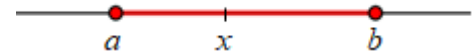
$$(1, \infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 1\}.$$



Intervalo cerrado  $[a, b]$

Es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que  $a$  y menores o iguales que  $b$ :

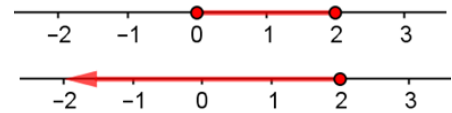
$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$



**Ejemplos:**

$$[0, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 2\};$$

$$(-\infty, 2] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 2\}.$$



Observaciones:

1. Abierto se indica con paréntesis,  $(a, b)$ ; cerrado, con corchetes,  $[a, b]$ ;  $[a, b)$  y  $(a, b]$  son semiabiertos, por la derecha y por la izquierda, respectivamente.
2. A la izquierda de  $-\infty$  y a la derecha de  $+\infty$  siempre es abierto:  $(-\infty, a)$ ;  $(-\infty, a]$ ;  $(b, +\infty)$ ,  $[b, +\infty)$ .

**Operaciones con intervalos**

Unión de intervalos: el resultado está formado por todos los números reales que son de alguno de los dos intervalos. Se indica con el símbolo  $\cup$ .

Si  $A$  y  $B$  son intervalos,  $A \cup B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$ .

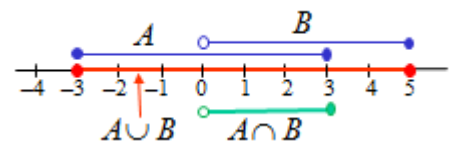
Intersección de intervalos: el resultado está formado por todos los números reales que son de ambos intervalos. Se indica con el símbolo  $\cap$ .

Si  $A$  y  $B$  son intervalos,  $A \cap B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$ .

**Ejemplos:**

Si  $A = [-3, 3]$  y  $B = (0, 5]$ , entonces:

$$A \cup B = [-3, 5]; \quad A \cap B = (0, 3].$$



Diferencia de intervalos:

$A - B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in A \text{ y } x \notin B\} \rightarrow$  son los números de  $A$  que no son de  $B$ .

$B - A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \in B \text{ y } x \notin A\} \rightarrow$  son los números de  $B$  que no son de  $A$ .

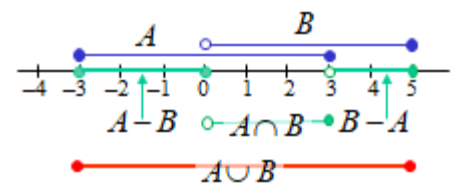
**Ejemplos:**

Si  $A = [-3, 3]$  y  $B = (0, 5]$ , entonces:

$$A - B = [-3, 0]; \quad B - A = (3, 5].$$

Observa que:

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A).$$



Complementarios

El complementario de un conjunto  $A$  está formado por todos los elementos de  $\mathbf{R}$  que no son de  $A$ . Suele denotarse por  $\bar{A}$  o  $A^C$ .

En  $\mathbf{R}$  pueden considerarse casos como los que se indican a continuación.

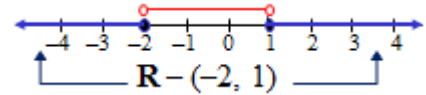
$$\rightarrow \mathbf{R} - (a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin (a, b)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq a \text{ o } x \geq b\}.$$

También se puede escribir así:  $\mathbf{R} - (a, b) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ .

**Ejemplo:**

Para el intervalo  $(-2, 1)$ :  $\mathbf{R} - (-2, 1) = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ .

$$\mathbf{R} - (-2, 1) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin (-2, 1)\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq -2 \text{ o } x \geq 1\}.$$



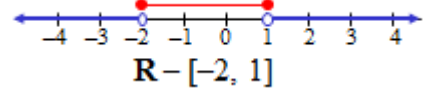
$$\rightarrow \mathbf{R} - [a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin [a, b]\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < a \text{ o } x > b\}.$$

También se puede escribir así:  $\mathbf{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ .

**Ejemplo:**

Para el intervalo  $[-2, 1]$ :  $\mathbf{R} - [-2, 1] = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ .

$$\mathbf{R} - [-2, 1] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \notin [-2, 1]\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -2 \text{ o } x > 1\}.$$



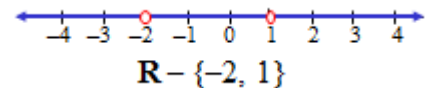
$$\rightarrow \mathbf{R} - \{a, b\} = \{x \in \mathbf{R} \mid x \neq a, b\} = (-\infty, a) \cup (a, b) \cup (b, +\infty).$$

Es el conjunto de todos los reales menos  $a$  y  $b$ .

**Ejemplo:**

Así,  $\mathbf{R} - \{-2, 1\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$ .

Es el conjunto de todos los reales menos  $-2$  y  $1$ .



$\rightarrow$  Esta notación se utiliza para indicar el campo de definición (los valores de  $x$  para los que se pueden realizar las operaciones que se piden).

**Ejemplos:**

a) La operación  $\sqrt{x-4}$  solo puede realizarse cuando  $x \geq 4$ . Intervalo  $[4, +\infty)$ .

b) La función  $f(x) = \frac{2}{x^2-9}$  no está definida para  $x = -3$  y  $x = 3$ . Se dice que su dominio de definición es  $\mathbf{R} - \{-3, 3\}$ .

Entorno de un punto

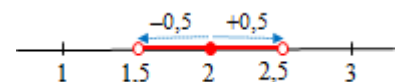
Es el conjunto de todos los números reales que están próximos a uno dado.

El entorno de centro  $a$  y radio  $r$  es:

$$E_r(a) = \{x \in \mathbf{R} \mid a - r < x < a + r\} = (a - r, a + r).$$

**Ejemplo:**

$$E_{0,5}(2) = (2 - 0,5, 2 + 0,5) = (1,5, 2,5).$$



### 3. Valor absoluto de un número real

Las expresiones con valor absoluto son muy frecuentes en Matemáticas. Aquí veremos las más sencillas, comenzando por recordar que:

El valor absoluto siempre es positivo:  $|a| = a$  si  $a > 0$ ;  $|a| = -a$  si  $a < 0$ .

**Ejemplos:**

$$|7| = 7; \quad |-5| = -(-5) = +5.$$

- Por tanto:  $|a| = |-a|$ . Así, por ejemplo,  $|8| = |-8| = 8$ .

Esto vale para cualquier expresión. Esto es:  $|A(x)| = |-A(x)|$ . Por ejemplo:  $|3x - 2| = |-3x + 2|$ .

→ Puede ser conveniente conocer las siguientes propiedades:

1. En valor absoluto “funciona” bien con productos, cumpliéndose que  $|ab| = |a||b|$ .

Por ejemplo:  $|8(-5)| = |8||-5|$ . En efecto:  $|8(-5)| = |-40| = 40$  y  $|8||-5| = 8 \cdot 5 = 40$ .

2. Desigualdad triangular:  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

La igualdad,  $|a + b| = |a| + |b|$ , se da cuando  $a$  y  $b$  tienen el mismo signo.

**Ejemplos:**

a)  $|8 + (-5)| \leq |8| + |-5|$ , pues  $|8 + (-5)| = |3| = 3$ , mientras que  $|8| + |-5| = 8 + 5 = 13$ .

b)  $|8 + 5| = |8| + |5| = 13$ ;  $|-8 - 5| = |-8| + |-5| = 8 + 5 = 13$ .

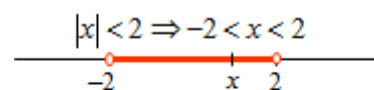
→ Es frecuente dar intervalos con notación de valor absoluto.

- $|x| < k \Leftrightarrow -k < x < k$ . Por tanto, decir que  $|x| < k$  equivale a decir que  $x \in (-k, k)$ .

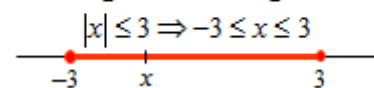
- Igualmente,  $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k \Leftrightarrow x \in [-k, k]$ .

**Ejemplos:**

a) Los valores de  $x$  que cumplen  $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$ .



b) Los valores de  $x$  que cumplen  $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3, 3]$ .



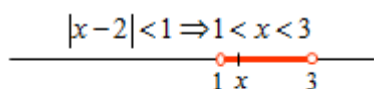
→ De manera análoga:

- $|x - a| < k \Leftrightarrow -k < x - a < k \Leftrightarrow a - k < x < a + k \Leftrightarrow x \in (a - k, a + k)$ .

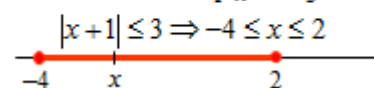
- $|x - a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x - a \leq k \Leftrightarrow a - k \leq x \leq a + k \Leftrightarrow x \in [a - k, a + k]$ .

**Ejemplos:**

a)  $|x - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$  (sumando 2 a cada miembro)  $\Leftrightarrow -1 + 2 < x - 2 + 2 < 1 + 2 \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$ .



b)  $|x + 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x + 1 \leq 3$  (restando 1 a cada miembro)  $\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-4, 2]$ .



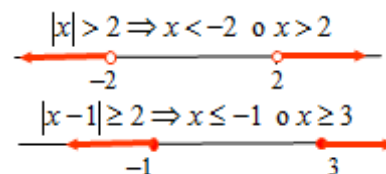
→ También se pueden proponer expresiones del tipo:

- $|x| > k \Leftrightarrow \begin{cases} x < -k \\ x > k \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$ .
- $|x - a| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \leq -k \\ x - a \geq k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq a - k \\ x \geq a + k \end{cases}$ .

**Ejemplos:**

a)  $|x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .

b)  $|x - 1| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \leq -2 \\ x - 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 3 \end{cases}$ .



Observación: Transformación de desigualdades  
Sobre el manejo de desigualdades debes saber:

→ Si  $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a + k \leq b + k \\ a - k \leq b - k \end{cases}$ . Si a los dos miembros de una desigualdad se les suma o resta el mismo número (la misma expresión), la desigualdad se mantiene.

→ Si  $a \leq b$  y  $k > 0 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot k \leq b \cdot k \\ a / k \leq b / k \end{cases}$ . Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por el mismo número positivo, la desigualdad se mantiene.

→ Si  $a \leq b$  y  $k < 0 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot k \geq b \cdot k \\ a / k \geq b / k \end{cases}$ . Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica o divide por el mismo número negativo, la desigualdad cambia de sentido: de  $\leq$  a  $\geq$ ; de  $\geq$  a  $\leq$ .

**Ejercicio**

Indica mediante notación de intervalos los conjuntos de números reales determinados por:

- a)  $|x + 2| < 0,5$ ;    b)  $|x - 3| \leq 2$ ;    c)  $|x + 3| < 0$ ;    d)  $|x| \geq 2$ ;    e)  $|x - 1| > 1$ .

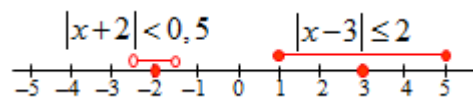
Haz su representación gráfica en todos los casos.

Solución:

a)  $|x + 2| < 0,5 \Leftrightarrow -0,5 < x + 2 < 0,5$  (restando 2 a cada miembro)  $\Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -0,5 - 2 < x + 2 - 2 < 0,5 - 2 \Leftrightarrow -2,5 < x < -1,5 \Leftrightarrow x \in (-2,5, -1,5)$ .

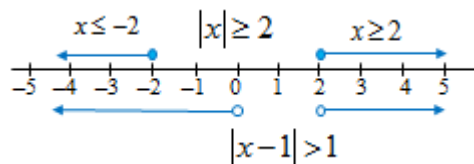
Observa que  $|x + 2| < 0,5 \Leftrightarrow E_{0,5}(-2)$ .

b)  $|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2$  (sumando 3 a cada miembro)  
 $\Rightarrow -2 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 2 + 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$ .



c)  $|x + 3| < 0$ . No hay ningún valor de  $x$  que cumpla esta condición: el valor absoluto siempre es mayor o igual que 0.

d)  $|x| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ .



e)  $|x - 1| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < -1 \\ x - 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ .

## 4. Aproximaciones y errores

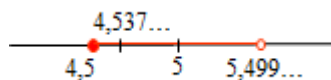
Cuando un número tiene muchas cifras decimales (o es muy grande) es conveniente “redondear” ese número, dar un resultado aproximado, mateniendo una precisión dada. Así, por ejemplo, 4,5375462 puede aproximarse por 4,5 o por 4,54. Lo mismo sucede con una cantidad tan grande como 34.683.404.789, que podría aproximarse por 34.680 millones

El proceso de redondeo consiste en prescindir de las cifras que siguen a una determinada, sumando una unidad a esta última si la primera cifra eliminada es 5 o superior a 5.

### Ejemplos:

a) 4,5375462 puede redondearse a 4,5 o a 4,54, a décimas o a centésimas, respectivamente.

→ Su aproximación a unidades es 5. Todos los números del intervalo  $[4,5, 5,49\dots)$  se aproximan, a unidades, a 5.



b) 34.683.404.789 puede aproximarse a 34.700 millones o a 34.680 millones, con redondeos a cientos de millones o a decenas de millones, respectivamente.

→ Cuando se hace una aproximación siempre se comete (se acepta) un error. Ese error puede considerarse de dos formas: como error absoluto y como error relativo.

- El error absoluto es la diferencia entre el valor exacto y el aproximado de un número:

$$\text{Error absoluto} = E_A = |\text{Número exacto} - \text{Número aproximado}|$$

Así, el error absoluto al aproximar 4,5375462 por 4,5 es  $E_{A1} = |4,5375462 - 4,5| = 0,0375462$ : menos de 4 centésimas.

Y al aproximar 34.683.404.789 por 34.700 millones, el error absoluto que se comete es

$$E_{A2} = |34.683.404.789 - 34.700.000.000| = 16.595.211$$
: más de 16 millones.

El error absoluto es muchos millones de veces mayor en el segundo caso.

- El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto de la magnitud:

$$\text{Error relativo} = E_r = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor exacto}}$$

Los errores relativos correspondientes a los dos ejemplos anteriores son:

$$E_{r1} = \frac{0,0375462}{4,5375462} = 0,008274\dots \rightarrow 0,8274\%; \quad E_{r2} = \frac{16.595.211}{34.683.404.789} = 0,000478\dots \rightarrow 0,0478\%$$

El error relativo es 17 veces mayor en el primer caso. (La relación entre errores absoluto y relativo no es directa. Un mayor error absoluto no implica que el error relativo correspondiente sea mayor).

→ La medida que se utiliza para establecer comparaciones entre aproximaciones es el error relativo: cuando dos magnitudes se aproximan, es mejor la estimación que genera menor error relativo.

- El error relativo establece la variación con el total considerado. Si ese error se multiplica por 100, se obtiene la variación porcentual. Así, por ejemplo, no es lo mismo aumentar 1 partiendo de 4 (pasar de 4 a 5), que aumentar 1 partiendo de 400 (pasar de 400 a 401). En el primer caso se aumenta un 25 %; en el segundo caso, un 0,25 %  $\rightarrow 1/4 = 0,25$ ;  $1/400 = 0,0025$ .
- Cuando las magnitudes no son homogéneas no tiene sentido comparar los errores absolutos: no pueden compararse, por ejemplo, diferencias de longitud con diferencias de superficie. Por eso:

### Ejemplo:

Para una persona que está sentada, alguien estima que mide 180 cm y pesa 70 kg. Si en realidad mide 185 cm y pesa 73 kg, entonces:

→ los errores absolutos son de 5 cm y 3 kg;

→ los errores relativos de ambas estimaciones (redondeados a milésimas) son, respectivamente:

$$E_{r1} = \frac{5}{186} \approx 0,027 \rightarrow 2,7\%; \quad E_{r2} = \frac{3}{73} \approx 0,041 \rightarrow 4,1\%$$

La estimación ha sido mejor en el caso de la estatura.

## 5. Notación científica

### Orden de magnitud de una cantidad

Unidades: orden de magnitud 0  $\rightarrow 10^0$ ;

Centenas: orden de magnitud 2  $\rightarrow 100 = 10^2$ ;

Millones: orden de magnitud 6  $\rightarrow 1.000.000 = 10^6$ ;

Miles de millones  $\rightarrow 1.000.000.000 = 10^9$ ;

En todos los casos: el exponente indica el orden de magnitud; al aumentar 1 el orden de magnitud la cantidad es 10 veces mayor.

Lo mismo puede establecerse para cantidades pequeñas:

Décimas: 0,1  $\rightarrow 10^{-1}$ , orden de magnitud  $-1$ ; Centésimas: 0,01  $\rightarrow 10^{-2}$ , orden de magnitud  $-2$ ;

Milésimas: 0,001  $\rightarrow 10^{-3}$ ; Millonésimas: 0,000001  $\rightarrow 10^{-6}$ ; Diezmillonésimas: 0,0000001  $\rightarrow 10^{-7}$ ;

Cienmillonésimas: 0,0000001  $\rightarrow 10^{-8}$ ; ...

Decenas: orden de magnitud 1  $\rightarrow 10 = 10^1$ ;

Millares: orden de magnitud 3  $\rightarrow 1000 = 10^3$ ;

Cientos de millones  $\rightarrow 100.000.000 = 10^8$ ;

Billones  $\rightarrow 10^{12}$ ; ...

Para asimilar correctamente el número 436000000000 hay que contar detenidamente el número de ceros, o separar los dígitos en grupos de 3 cifras, 436 000 000 000, así acertamos a decir que dicha cantidad se lee como “cuatrocientos treinta y seis mil millones”. Lo significativo de esa cantidad son dos cosas:

1.º Que se trata de cientos de miles de millones; 2.º Que esos cientos de miles son 436. Por eso, el número puede expresarse como  $436 \times 10^9 = 4,36 \times 10^{11}$ . El 11 del exponente indica que la coma decimal debe desplazarse 11 lugares hacia la derecha. (Solo se deja una cifra delante de la coma).

Igualmente, para números pequeños, como, por ejemplo, 0,000 000 23, que se lee “veintitres cienmillonésimas”, puede escribirse como  $23 \times 10^{-8} = 2,3 \times 10^{-7}$ . El  $-7$  del exponente indica que la coma decimal debe desplazarse 7 lugares hacia la izquierda. (Solo se deja una cifra significativa delante de la coma).

$\rightarrow$  En general, una cantidad en notación científica se expresa así:  $N \cdot 10^n$ , donde N es un número decimal comprendido entre  $-10$  y  $10$ , con cifra entera distinta de 0 y n es un número entero que indica el orden de magnitud.

La notación científica del número 436000000000 es  $4,36 \times 10^{11}$ , y no  $436 \times 10^9$ : solo hay que dejar una cifra delante de la coma.

La notación científica del número 0,00000023 es  $2,3 \times 10^{-7}$ , y no  $23 \times 10^{-8}$ : solo hay que dejar una cifra delante de la coma.

En las calculadoras científicas se generan automáticamente y aparecen, por ejemplo, como sigue:

4.36	11	o	4.36	11	que quiere decir $4,36 \times 10^{11} = 436\,000\,000\,000$
2.3	-7	o	2.3	-7	que quiere decir $2,3 \times 10^{-7} = 0,000\,000\,23$

$\rightarrow$  Cuando se da una cantidad en notación científica se está haciendo un redondeo; se redondea a la última cifra significativa que aparece.

Así, por ejemplo, el número  $2,073 \times 10^7$ , que entenderemos como 20730000, es una cantidad que está entre 20725000 y 20734999,999... (Si no lo entiendes, hazlo al revés: redondea a decenas de millar – orden de magnitud 4– cualquier número  $x$ , tal que  $20725000 \leq x \leq 20734999$ . Debes obtener el dado,  $20730000 = 2,073 \times 10^7$ ). El error absoluto máximo que se comete es  $|20725000 - 20730000| = 5000$ ;

cuyo error relativo correspondiente es  $\frac{5000}{2072500} \approx 0,00024$ , algo más de 2 diezmilésimas.

Igualmente,  $2,3 \times 10^{-7} = 0,000\,000\,23$  se ha redondeado a cienmillonésimas, orden de magnitud  $-8$ . Todos los números reales  $0,000\,000\,225 \leq x < 0,000\,000\,234999...$  se redondean a  $0,000\,000\,23$ .



## 6. Números escritos con letras

### El número $\pi$

Es un número irracional, con infinitas cifras decimales no periódicas. Su valor es:

$$\pi = 3,1415926535\ 8979323846\ 2643383279\ 5028841971\ 6939937510\ 5820974944$$

Naturalmente es más sencillo escribir  $\pi$ .

Este número es el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro.

Suele aproximarse por  $\pi = 3,14$  o  $\pi = 3,1416$ .

Está presente en las funciones trigonométricas y en cualquier fenómeno que se propague por ondas.

Desde siempre ha suscitado la curiosidad de matemáticos y otros artistas. Tiene hasta su día conmemorativo: el 14 de marzo, 3,14.

### El número $\Phi$

También es irracional:

$$\Phi = 1,6180339887\ 4989484820\ 4586834365\ 6381177203\ 0917980576\ 2862135448\ \dots$$

Es conocido como número áureo, número de oro. Se lee fi o phi. Designa la “divina proporción”, la que determina el rectángulo con dimensiones más equilibradas. La mayoría de las tarjetas de crédito y carnés se ajustan a esa proporción: el cociente entre el largo y el ancho es igual a  $\Phi = 1,618\dots$

Parece que Euclides definió su valor diciendo que "una línea recta está dividida en el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor."

(Tomado de ABC/ciencia, 16/04/2010). Esto es, se cumple la relación

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow ab + b^2 = a^2.$$

Si se hace  $a = 1$  y  $b = x$ , entonces se tiene:

$$b + b^2 = 1 \rightarrow x + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Tomando la solución positiva,  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,618033988\dots$ ,

se obtiene que

$$\Phi = 1 + x = (a + b) = 1 + 0,618033988\dots = 1,618033988\dots$$

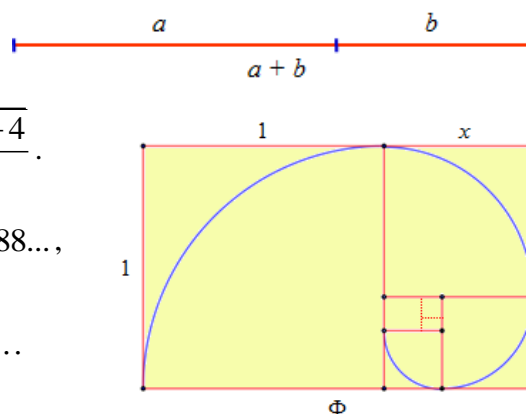
Su valor exacto es  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

En el rectángulo (áureo) adjunto se ha trazado la espiral áurea o de Fibonacci, con cuya sucesión está relacionado.

En Arquitectura, en pintura, en todo el Arte, se recurre a la proporción áurea con frecuencia (El Partenón de Atenas, Notre Damme de París; Leonardo, La Gioconda; Durero, Adán y Eva; Velázquez, Las Meninas; Dalí, Leda atómica).

Aparece en la naturaleza con una insistencia asombrosa: ramas de árboles, pétalos de las flores, pipas de un girasol, espirales de una piña, conchas de ammonites, ...

(Puedes ver el vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=YCG6or7sZgA>)



### El número $e$

Es otro número irracional, presente en cuestiones relacionadas con la economía (problemas de interés compuesto), la biología, la electricidad, la química (desintegración de sustancias radiactivas)... Es la base de los logaritmos neperianos (por John Napier). Su valor es:

$$e = 2,7182818284\ 5904523536\ 0287471352\ 6624977572\ 4709369995\ 9574966967\ \dots$$

Como es un número importante se ha estudiado desde muchos puntos de vista. Matemáticamente

puede definirse como un límite,  $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

**PROBLEMAS PROPUESTOS**

1. Dados los intervalos  $A = [-3, 2]$ ,  $B = (-2, 3)$  y  $C = (-\infty, 0)$ , expresa mediante notación de intervalos:

- a)  $A \cup B$ .                      b)  $A \cap C$ .                      c)  $C - A$ .                      d)  $A - C$ .                      e)  $\mathbf{R} - B$ .

Haz su representación gráfica en todos los casos.

2. Indica mediante notación de intervalos los conjuntos de números reales determinados por:

- a)  $|x| \leq 1$ .                      b)  $|x| < 5$ .                      c)  $|x-2| \leq 1$ .                      d)  $|x+2| < 0,5$ .                      e)  $|x+1| < 0$ .

Haz su representación gráfica en todos los casos.

3. Indica mediante notación de intervalos los conjuntos de números reales determinados por:

- a)  $|x| > 0$ .                      b)  $|x| \geq 1$ .                      c)  $|x-2| \geq 1$ .                      d)  $|x+2| \geq 0,5$ .                      e)  $|x+1| > 0$ .

Haz su representación gráfica en todos los casos.

4. Expresa con notación de intervalos los siguientes conjuntos de números reales  $x$ :

- a)  $-3 < x < 2$ .                      b)  $x \geq -1$ .                      c)  $5 < x \leq 7$ .                      d)  $x \leq -2$ .

5. Dados los intervalos  $A = (-2, 5)$ ,  $B = [1, 7]$  y  $C = (0, +\infty)$ , determina:

- a)  $A \cup B$ .                      b)  $A \cap C$ .                      c)  $A - C$ .                      d)  $C - B$ .

Haz su representación gráfica en todos los casos.

6. Representa gráficamente los números reales  $x$  que cumplen la condición:

- a)  $|x| > 4$ .                      b)  $|1-x| < 3$ .                      c)  $|x+2| \leq 2$ .                      d)  $|x-3| \geq 0,5$ .

7. La renta per cápita de un país se ha redondeado a cientos de euros en 21500. Da el intervalo en el que se mueve ese valor de renta. ¿Qué error absoluto y relativo máximo se está asumiendo?

8. Comprueba que cuando se da un resultado redondeado con dos cifras decimales, el error absoluto que se asume es menor o igual que 5 milésimas.

9. a) ¿Cuándo se redondea a centímetros la estatura de una persona, ¿qué error absoluto máximo se está cometiendo?

b) Si se dice que una persona mide 174 cm, ¿entre qué valores reales está su estatura? ¿Qué error relativo máximo se está cometiendo?

10. Un trabajador tiene 38 años y gana 1920 euros al mes. Un amigo nos dice que “redondeando” tiene 40 años y gana 2000 €/mes. ¿Cuál de los dos datos está mejor aproximado?

11. a) Indica el orden de magnitud de los siguientes números:

$$7,03 \times 10^8; \quad 3,203 \times 10^{12}; \quad 2,25 \times 10^{-3}; \quad 4,78 \times 10^{-5}.$$

b) Escríbelos con todas sus cifras.

12. Escribe con notación científica, dejando cuatro cifras significativas, los siguientes números:

- a) 2347800567.                      b) 40053890000.                      c) 0,0000050734.                      d) 0,000000070456.