ECUACIONES

Las ecuaciones, los problemas, se resuelven con método.
Un método: confía en ti, ¡puedes!

1. Ecuaciones: repaso

Una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas.
Son ecuaciones, por ejemplo: a) $3x = \frac{x-5}{2}$; b) $2x^2 = x+1$; c) $\sqrt{x^2+9} = 5$.
También son ecuaciones, pero con dos incógnitas: d) $x-2y=6$; f) $x^2-y=3$; g) $x \cdot y = -4$.

Solución de una ecuación es el conjunto de valores que puede tomar la incógnita (o de las incógnitas) para que se cumpla la igualdad.
En las ecuaciones de arriba se tiene:

- Para a), su solución es $x = -1 \to$ Sustituyendo $x = -1$ en ambos miembros de la igualdad se obtiene: en el primer miembro: $3 \cdot (-1) = -3$; en el segundo, $\frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$. (Los resultados son iguales).
- La ecuación b) tiene dos soluciones, que son: $x = 1$ y $x = -\frac{1}{2}$. Que $x = 1$ es solución es evidente; comprobemos la segunda: primer miembro, $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; segundo miembro: $-\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$.
- $\sqrt{x^2+9} = 5$ también tiene dos soluciones, $x = -4$ y $x = 4$. Si en el radicando se sustituye x por -4 o 4 se obtiene 25, cuya raíz es 5.
- La ecuación con dos incógnitas $x-2y=6$ tiene infinitos pares solución: (0, –3); (6, 0); (2, –2); …
- Lo mismo pasa con las ecuaciones dadas en f) y en g). (Busca y comprueba algunos pares).

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.
Para resolver una ecuación hay que transformarla en otra equivalente a ella cuyas soluciones se obtengan de forma simple.
Las transformaciones habituales se fundamentan en las propiedades de las igualdades;
1. Si a los dos miembros de una igualdad (de una ecuación) se les suma o resta la misma expresión algebraica, la igualdad no varía: las soluciones de la ecuación no varían. (Esta propiedad permite trasponer términos de un miembro a otro de la ecuación: "lo que está sumando pasa restando"; …).
2. Si los dos miembros de una igualdad (de una ecuación) se multiplican o dividen por un número distinto de 0, la igualdad no varía: la ecuación resultante es equivalente a la dada. (Esta propiedad permite quitar denominadores y despejar: "lo que está dividiendo pasa multiplicando"; …)
3. Si $A(x) \cdot B(x) = 0 \Rightarrow A(x) = 0$ o $B(x) = 0$. (Si un producto es 0, alguno de los factores debe ser 0).

Ejemplos:
a) $3x-5=7x+4 \to$ (se traspone $3x$ al miembro de la derecha; y 4 al de la izquierda) $\to$
$-5-4=7x-3x \to$ (se opera) $\Rightarrow -9=4x \to$ (se despeja) $\Rightarrow -\frac{9}{4} = x$.

Nota: Aunque es bien sabido, la igualdad $-9=4x \Leftrightarrow 4x=-9 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{9}$.

b) Si $\left(x^2-4\right) \cdot (2x+5) = 0 \Rightarrow \left(x^2-4=0 \Rightarrow x=-2 \text{ o } x=2\right)$ o $\left(2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}\right)$.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita
También se llaman lineales. Su forma estándar es $ax+b=0$, siendo a y b números y x la incógnita.

Se resuelve así: $ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$.

Normalmente aparecen con más términos, con paréntesis, con denominadores, …, pero siempre pueden transformarse hasta llegar a la forma estándar.

Ejemplo:

$$3x+2=2x-\frac{x-5}{2} \to \text{(se multiplica por 2)} \Rightarrow 2(3x+2)=2\left(2x-\frac{x-5}{2}\right) \to \text{(se opera)}$$

$$\Rightarrow 6x+4=4x-2\left(\frac{x-5}{2}\right) \Leftrightarrow 6x+4=4x-(x-5) \Leftrightarrow 6x+4=4x-x+5 \to \text{(se trasponen términos)}$$

$$\Rightarrow 3x=1 \to \text{(se despeja)} \Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Resolución de problemas
Las ecuaciones se emplean, entre otras cosas, para resolver problemas. Para ello, en cada caso, debes:
1) Leer con detenimiento el enunciado.
2) Determinar qué se pide; eso que se pide suele ser la incógnita, que puedes designar como x.
3) Descubrir los datos que se dan. Esos datos pueden darse de manera implícita, lo que obliga a pensar.
4) Establecer la relación entre los datos y la incógnita: esa relación da lugar a una ecuación.
5) Resolver la ecuación.
6) Comprobar que la solución es correcta y coherente.
→ Practicamos con algunos ejercicios.

Ejercicio 1
Una oposición consta de dos pruebas eliminatorias. En la primera prueba son eliminados el 60 % de los presentados; en la segunda prueba, se eliminan al 40 % de los que quedaban. Si el número de aprobados fue de 300 personas, ¿cuántas se presentaron a la oposición?
Solución:
La incógnita es el número de personas que se presentan. Si son x personas, como se sabe que:
- En la primera prueba se elimina al 60 %. El 60 % de x es $0,60 \cdot x$.
- Pasan a la segunda prueba: $x-0,60x=0,40x$.
- De ellos (de $0,40x$), son eliminados el 40 %. El 40 % de $0,40x$ es $0,40 \cdot (0,40x)=0,16x$.
- Aprueban (los que se presentan a la 2ª prueba, menos los eliminados): $0,40x-0,16x=0,24x$.

Como aprueban 300, entonces $0,24x=300 \Rightarrow x=\frac{300}{0,24}=1250$.

Se presentaron 1250 personas.

Ejercicio 2
La edad de un padre es el triple de la de su hija más 2 años. Si hace 5 años el padre cuadriplicaba en edad a la hija, ¿qué edades tienen padre e hija?
Solución:
Como hay dos momentos, hoy y hace 5 años, puede resultar útil organizar la información como sigue (suponiendo que la hija tiene hoy x años):

Edades	Hoy	Hace 5 años
Hija	x	$x-5$
Padre	$3x+2$	$3x-3$

Hace 5 años, la edad del padre era cuatro veces la de la hija:
$\Rightarrow 3x-3=4(x-5) \Rightarrow 3x-3=4x-20 \Rightarrow 17=x$.

La hija tiene 17 años; el padre, 3 · 17 + 2 = 53 años. (Hace 5 años, 12 y 48 → 48 = 4 · 12).

Ecuaciones de segundo grado

También se llaman <u>cuadráticas</u>. Su forma estándar es: $ax^2+bx+c=0$.

Sus soluciones son: $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

A las soluciones también se les llama *raíces* de la ecuación.

Pueden tener dos, una o ninguna solución, dependiendo de que el radicando b^2-4ac sea mayor que 0, sea 0 o sea menor que 0, respectivamente. (A la expresión b^2-4ac se le llama discriminante).

<u>Casos particulares</u> (llamadas ecuaciones incompletas):

$ax^2+c=0 \to$ (se despeja) $\Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=-\dfrac{c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$. No siempre tiene solución.

$ax^2+bx=0 \Rightarrow$ (se saca factor común) $\Rightarrow x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0$ o $x=-\dfrac{b}{a}$.

Ejemplos:

(Se sugiere al lector que resuelva cada ecuación por su cuenta, y que, después, contraste el resultado).

a) $2x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\dfrac{3\pm1}{4}=\begin{cases}1\\1/2\end{cases}$. Dos soluciones.

b) $x^2-6x+9=0 \Rightarrow x=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot9}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\dfrac{6\pm0}{2}=\begin{cases}3\\3\end{cases}$. Solución $x=3$, doble.

c) $x^2+4x+6=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-24}}{2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-8}}{2}$. No hay solución.

d) $x^2-9=0 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\begin{cases}-3\\3\end{cases}$; $\quad 2x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-\dfrac{1}{2}}$. No tiene solución.

e) $x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=4\end{cases}$; $\quad 3x^2+x=0 \Rightarrow x(3x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=-1/3\end{cases}$.

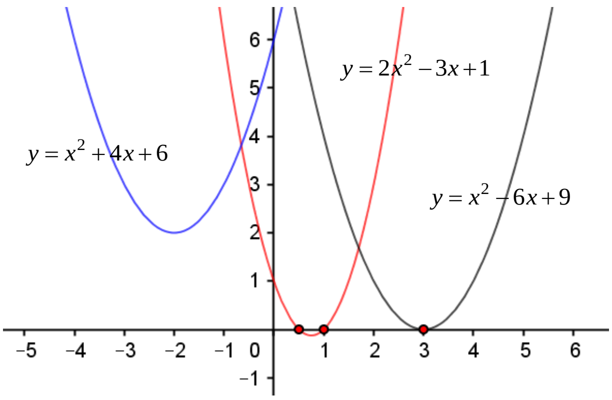
<u>Interpretación geométrica de las soluciones</u>

Como sabes, la función cuadrática (estudiada en 3º y 4º de ESO), cuya expresión es $y=ax^2+bx+c$, genera una gráfica que es una parábola.

Los puntos de corte de la parábola con el eje *OX* son aquellos en los que $y=0$; esto es, los puntos que cumplen que $ax^2+bx+c=0$: las soluciones de la ecuación de segundo grado.

Si la parábola corta dos veces al eje *OX*, la ecuación tiene dos soluciones; si corta solo una vez, la ecuación tendrá una solución doble; si no corta, la ecuación no tendrá solución.

- La gráfica de la función $y=2x^2-3x+1$ corta al eje de abscisas en los puntos $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=1$, que son las soluciones de la ecuación $2x^2-3x+1=0$.
- La gráfica de la función $y=x^2-6x+9$ corta al eje de abscisas solo en el punto $x=3$, que es la solución de la ecuación $x^2-6x+9=0$.
- La gráfica de la función $y=x^2+4x+6$ no corta al eje de abscisas: la ecuación $x^2+4x+6=0$ no tiene soluciones reales.



Algunas aplicaciones y problemas

La expresión cuadrática ax^2+bx+c aparece con mucha frecuencia en Matemáticas, asociada a una ecuación, como una función polinómica, … (por ejemplo, relacionada con funciones de oferta o demanda; o para realizar interpolaciones). Para profundizar en su manejo se plantean algunos ejercicios teórico-prácticos.

Ejercicio 3

a) Una solución de la ecuación $x^2+bx+2=0$ es x = 2, ¿cuánto vale b? Halla la otra solución.
b) Halla una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean 2 y –3.
Solución:
a) Si x = 2 es solución de $x^2+bx+2=0 \Rightarrow 4+2b+2=0 \Rightarrow b$ = –3.
La ecuación es $x^2-3x+2=0$: la otra solución es x = 1. (Compruébalo).

b) Las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ son las raíces del polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$.
Si esas raíces son $x=2$ y $x=-3$, entonces (por el teorema del factor),

$$P(x)=a(x-2)\cdot(x-(-3))=a(x-2)\cdot(x+3) \Rightarrow P(x)=a\left(x^2+x-6\right).$$

Por tanto, todas las ecuaciones de la forma $a\left(x^2+x-6\right)=0$ tienen por soluciones $x=2$ y $x=-3$; en particular, $x^2+x-6=0$.

Ejercicio 4

El producto de dos números enteros consecutivos es 240. Plantea una ecuación de segundo grado para hallarlos. ¿De qué números se trata?
Solución:
Dos números consecutivos son x y x + 1.

Si $x\cdot(x+1)=240 \Rightarrow x^2+x-240=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+960}}{2}=\dfrac{-1\pm 31}{2}=\begin{cases}-16\\ 15\end{cases}$.

Los números son 15 y 16; o –16 y –15.

Ejercicio 5

Dos personas trabajando conjuntamente realizan la limpieza de un parque en 2 horas. Si, por separado, uno de ellos necesitaría 3 horas más que el otro para hacer la misma limpieza del parque, ¿cuánto tardaría cada persona en realizar esa limpieza ella sola?
Solución:
Si la persona más rápida necesita x horas, la más lenta necesitará x + 3.

Por separado, en 1 hora, cada una limpiaría: $\dfrac{1}{x}$ del parque, la más rápida; y $\dfrac{1}{x+3}$, la otra.

Trabajando juntas, limpiarían, en una hora, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}$.

Como se sabe que entre las dos tardan 2 horas, en 1 hora limpiarán $\dfrac{1}{2}$ del parque.

Por tanto: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{2} \to$ (operando) $\dfrac{x+3}{x(x+3)}+\dfrac{x}{x(x+3)}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x(x+3)}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$4x+6=x(x+3) \Rightarrow 4x+6=x^2+3x \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases}x=3\\ x=-1\end{cases}.$$

La persona más rápida tardaría 3 horas en limpiar el parque; la otra necesitaría 6 horas.
La solución x = –1 carece de sentido en este contexto.

2. Ecuaciones de grado superior a dos

Ecuaciones de tercer grado

Son ecuaciones de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, siendo *a*, *b*, *c* y *d* números reales, con $a \neq 0$. Sólo pueden resolverse cuando tienen alguna solución entera: esa solución, si existe, será un número divisor del término independiente, *d*; si no hubiese término independiente se saca factor común *x*. Las demás soluciones pueden hallarse descomponiendo en factores la ecuación inicial.

Observaciones:

1) Una ecuación de tercer grado tiene al menos una solución real, aunque no siempre pueda encontrarse. Sus soluciones pueden ser dobles o triples.

2) Las soluciones de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ son las raíces del polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Por tanto, vale todo lo que se dice en Factorización de polinomios.

3) La descomposición factorial de una ecuación es una buena técnica para su resolución, pues si una ecuación, cualquiera que sea su grado, viene dada como producto de factores igualados a 0, las soluciones de esa ecuación son las de cada uno de los factores igualados a cero.

Ejemplos:

a) Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ hay que encontrar alguna solución entera.
Si existe, será uno de los divisores de 6: ±1; ±2; ±3; ±6.
Se prueba con $x = 1$ → no vale, pues $1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$; sí vale $x = -1$, pues $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$.
En consecuencia, $x + 1$ es un factor de la ecuación; el otro factor se obtiene dividiendo:

	1	–4	1	6
–1		–1	5	–6
	1	–5	6	0

$\Rightarrow (x^3 - 4x^2 + x + 6) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$.

Por tanto,

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Las otras dos soluciones de la ecuación inicial son las de $(x^2 - 5x + 6) = 0$, que valen 2 y 3.
En consecuencia, las soluciones de la ecuación planteada son $x = -1$, $x = 2$ y $x = 3$.

b) Para resolver $x^3 - 9x = 0$ basta con sacar factor común:

$$x^3 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 0.$$

Sus soluciones son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -3$.

RECURSOS INFORMÁTICOS
Resuelve(x^3–9x=0) →
{x = 3, x = 0, x = 3}

c) La ecuación $x^3 + x^2 + 1 = 0$ no tiene ninguna solución entera, pues ni 1 ni –1, que son los únicos divisores del término independiente, lo son. Por tanto, en este caso no es posible dar la solución exacta.

d) La ecuación $2x^3 - 5x^2 = 0$ puede escribirse como $x^2(2x-5) = 0$.

Sus soluciones son $x = \frac{5}{2}$ y $x = 0$, que es doble.

e) Las soluciones de la ecuación $(x+3)(4x^2-1)(x^3+8) = 0$ son las de cada uno de los factores igualado a 0. Esto es:

$$\begin{cases} x+3=0 & \Rightarrow \quad x=-3 \\ 4x^2-1=0 & \Rightarrow \quad x=\pm 1/2 \\ x^3+8=0 & \Rightarrow \quad x=\sqrt[3]{-8}=-2 \end{cases}.$$

Ecuaciones bicuadradas

Son ecuaciones de grado cuatro, de la forma $ax^4+bx^2+c=0$. (No tienen términos en x^3 ni en x).
Haciendo el cambio $x^2=t$ queda $at^2+bt+c=0$.
Esta igualdad, tiene como máximo dos soluciones, t_1 y t_2. Por tanto, las soluciones de la ecuación bicuadrada original serán cuatro a lo sumo, que se calculan como sigue:

$$x^2=t_1 \Rightarrow x_1=+\sqrt{t_1},\, x_2=-\sqrt{t_1}\,; \qquad x^2=t_2 \Rightarrow x_3=+\sqrt{t_2},\, x_4=-\sqrt{t_2}$$

Ejemplos:

a) La ecuación $x^4-3x^2+2=0 \Leftrightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow t=1, t=2 \Rightarrow x=\pm 1$ y $x=\pm\sqrt{2}$.
Esta ecuación tiene cuatro soluciones reales: $x = 1$; $x = -1$; $x=\sqrt{2}$; $x=-\sqrt{2}$.

b) La ecuación $x^4+5x^2-36=0 \Leftrightarrow t^2+5t-36=0 \Rightarrow t=4, t=-9 \Rightarrow x=\pm 2$ y $x=\pm\sqrt{-9}$, que no existe. Esta ecuación tiene dos soluciones reales: $x = -2$ y $x = 2$.

c) Si la ecuación bicuadrada es reducida es todavía más fácil. Por ejemplo:

$$\to x^4-3x^2=0 \Rightarrow x^2\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\to x^4-16=0 \Rightarrow x^4=16 \Rightarrow x=\sqrt[4]{16} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}.$$

$\to x^4+16=0$ no tiene soluciones reales.

3. Ecuaciones irracionales

Estas ecuaciones contienen al menos un término en el que la incógnita está bajo el signo radical.
Se resuelven aislando la raíz y elevando al cuadrado. Suelen dar lugar a una ecuación de segundo grado. Una vez halladas las soluciones hay que comprobar que son válidas, pues al elevar al cuadrado la expresión inicial pueden *ganarse* soluciones.

Ejemplos:

a) Para resolver $x-\sqrt{x}=6$, se procede así:

1) Se trasponen términos para aislar la raíz $\to x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow x-6=\sqrt{x}$.

2) Se elevan al cuadrado los dos miembros $\to (x-6)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-12x+36=x$.

3) Se resuelve la ecuación obtenida $\to x^2-13x+36=0 \Rightarrow x = 9, x = 4$.

4) Se comprueban las soluciones halladas:

$x = 9$ es válida, pues: $9-\sqrt{9}=9-3=6$; $x = 4$ no es válida, $4-\sqrt{4}=4-2=2\neq 6$.

b) Para resolver $\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x-1}=1$ se procede como sigue:

$$\sqrt{2x+5}-\underline{2\sqrt{x-1}}=1 \Rightarrow \sqrt{2x+5}=1+\underline{2\sqrt{x-1}} \Rightarrow \left(\sqrt{2x+5}\right)^2=\left(1+2\sqrt{x-1}\right)^2 \; {}^{(*)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x+5=1+4\sqrt{x-1}+4(x-1) \Rightarrow 2x+5=1+4\sqrt{x-1}+4x-4 \to$ se aísla la 2ª raíz y se hace otra vez el cuadrado $\to -2x+8=4\sqrt{x-1} \to (-2x+8)^2=\left(4\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow$

$4x^2-32x+64=16(x-1) \Rightarrow 4x^2-48x+80=0 \Leftrightarrow x^2-12x+20=0$.

Resuelve(sqrt(2x+5)–2sqrt(x–1) =1) → {x = 2}

RECURSOS INFORMÁTICOS

Las soluciones de la última ecuación son: $x = 10$, $x = 2$.
Solo es válida la solución $x = 2$.
La *solución* $x = 10$ no es válida, pues:

$\sqrt{2\cdot 10+5}-2\sqrt{10-1}=1 \to \sqrt{25}-2\sqrt{9}=1 \Rightarrow 5-2\cdot 3=1 \Rightarrow -1=1$, que no es posible

Observaciones:
Al intentar resolver estas ecuaciones son frecuentes los errores. El más común es hacer mal la operación de elevar al cuadrado.

1) Por ejemplo, está mal lo siguiente: $x-\sqrt{x}=6 \Rightarrow \left(x-\sqrt{x}\right)^2=6^2 \Rightarrow x^2-x=6 \Rightarrow x=3$.
→ Se ha hecho mal el cuadrado del primer miembro.

2) En la ecuación b) anterior, se pueden dar, entre otros, los siguientes errores:

- $\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x-1}=1 \Rightarrow \left(\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x-1}\right)^2=1^2 \Rightarrow 2x+5-4(x-1)=1 \rightarrow$ se comienza mal al hacer mal el cuadrado del primer miembro.
- Se comienza bien $\left(\sqrt{2x+5}\right)^2=\left(1+2\sqrt{x-1}\right)^2 \Rightarrow 2x+5=1+2(x-1)+4\sqrt{x-1} \rightarrow$ se hace mal el cuadrado del segundo miembro.

→ (*) el cuadrado: $\left(1+2\sqrt{x-1}\right)^2=\left(1+2\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(1+2\sqrt{x-1}\right)=1+2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+\left(2\sqrt{x-1}\right)^2=$
$=1+4\sqrt{x-1}+4(x-1)$.

4. Ecuaciones racionales

Son de la forma $\dfrac{A(x)}{B(x)}+C(x)=0$, donde, al menos, $B(x)$ es una expresión polinómica; la incógnita aparece en algún denominador. ($A(x)$ y $C(x)$ pueden ser números).

Para resolverla hay que transformarla en otra de tipo polinómico. Para ello se recomienda:
1) Eliminar denominadores; 2) Resolver paréntesis; 3) Agrupar términos; …

- Caso particular: la ecuación $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0$ es equivalente a $A(x)=0$.

RECURSOS INFORMÁTICOS

Resuelve(x/(x+1)+2=(3x+1)/x) → {x = −1/2}

Ejemplos:

a) Para resolver la ecuación $\dfrac{x}{x+1}+2=\dfrac{3x+1}{x}$ puede procederse así:

1) Se suman los términos del primer miembro. Resulta: $\dfrac{x+2(x+1)}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x}$.

2) Se quitan denominadores (multiplicando "en cruz"; después, se opera y simplifica):

$$x\left(x+2(x+1)\right)=(3x+1)(x+1) \Leftrightarrow x^2+2x^2+2x=3x^2+3x+x+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x=3x^2+4x+1 \Leftrightarrow 0=2x+1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

b) La ecuación $\dfrac{x^2+5x}{x+1}=0 \Leftrightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x\cdot(x+5)=0$. Sus soluciones son $x = 0$ y $x = -5$.
→ Si una fracción es 0 ⇒ el numerador debe ser 0.

c) La ecuación $\dfrac{2x-2}{x-5}-1+x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-2}{x-5}=1-x \rightarrow$ (el denominador *pasa* multiplicando) →

$\Rightarrow 2x-2=(x-5)(1-x) \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1$ y $x=4$.

Observación:
Son frecuentes los errores a la hora de operar. Se pueden corregir operando ordenadamente y comprobando la solución hallada en la ecuación inicial. (Te sugiero que intentes resolver los ejemplos anteriores de otra manera; después, comprueba que las soluciones coinciden).

5. Ecuaciones con valor absoluto

Estas ecuaciones pueden presentarse asociadas a cualquier expresión, pero en algún término figura el valor absoluto.
Todas se resuelven teniendo en cuenta el significado del valor absoluto:

$$|E(x)| = c \Leftrightarrow E(x) = c \text{ o } E(x) = -c .$$

Esto implica que cada ecuación da lugar a dos ecuaciones.

Ejemplos:

a) $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=3 \Rightarrow x=2 \\ 2x-1=-3 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$. Las soluciones son $x = 2$ y $x = -1$. (Compruébalo).

b) La ecuación $|x^2-3x| = 2$ da lugar a $x^2-3x=2$ y a $x^2-3x=-2$, equivalentes a su vez a $x^2-3x-2=0$ y a $x^2-3x+2=0$, cuyas soluciones son: $x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$, $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$, $x = 1$ y $x = 2$.

c) $\frac{4}{x} = |x| \Leftrightarrow 4 = x \cdot |x|$. Da lugar a dos ecuaciones, dependiendo de considerar $x > 0$ o $x < 0$.

$\rightarrow$ Si $x > 0$ (como $|x| = x$) $\Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x = -2$ o $x = 2$.

La solución $x = -2$ no es válida, pues si se sustituye: $\frac{4}{-2} = -2 \neq |-2|$.

$\rightarrow$ Si $x < 0$, como $|x| = -x$, de $4 = x|x| \Rightarrow 4 = x\cdot(-x) \Rightarrow 4 = -x^2$, que no tiene solución. (Recuerda que $x^2 \geq 0$ y $-x^2 \leq 0$).

d) La ecuación $\frac{|x|}{2-x} = 1 \Leftrightarrow |x| = 2-x$, que a su vez define dos ecuaciones:

$$|x| = \begin{cases} -x = 2-x, \text{ si } x<0 \\ x = 2-x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c} -x = 2-x \Rightarrow 0 = 2, \text{ que es imposible;} \\ \hline x = 2-x, \text{ cuya solución es } x = 1. \end{array}$$

RECURSOS INFORMÁTICOS

Resuelve
(abs(x)/(2–x)=1)
→ {x=1}

e) $2x|4-x| = 0$ es más fácil: cada uno de los factores debe ser 0.
Sus soluciones son; $2x = 0$ o $4-x=0 \Rightarrow x = 0$ o $x = 4$.

NOTA:
Las ecuaciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas se estudiarán en el Tema 9.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-2)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}(3-2x)$. b) $\frac{2-x}{2}-\frac{4x-3}{5}=2x-5-\frac{1}{4}(2x-3)$.

Nota: En muchos de los problemas propuestos pueden emplearse recursos informáticos para comprobar tu resultado. Hazlo en algunos.

RECURSOS INFORMÁTICOS

2. Opera las siguientes expresiones algebraicas y después resuelve la ecuación obtenida.

a) $x^2=\frac{x}{2}+3$. b) .$(x-3)\cdot(x+2)=6$; c) $2x-1=\frac{-4}{x-3}$. d) $x+\frac{1}{x}=2$.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-5)(-2x+3)=0$. b) $\frac{x^2-x-2}{x+4}=0$. c) $\frac{x}{x-3}=\frac{2x}{x-2}$. d) $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{8}{x}$.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{x+1}=\frac{3x+1}{x}-2$. b) $\frac{2x^2-3x}{x+3}=0$. c) $\frac{4}{x+3}=0$. d) $\frac{x^2-3x}{x^2+1}-2=0$.

5. a) Sabiendo que una solución de la ecuación $x^2+bx-5=0$ es $x = 1$, ¿cuánto vale b? Halla la otra solución.

b) Sabiendo que una solución de la ecuación $x^2-3x+c=0$ es $x = -2$, ¿cuánto vale c? Halla la otra solución.

c) Una solución de la ecuación $ax^2+6x=0$ es $x = 3$, ¿cuánto vale a? Halla la otra solución.

6. Halla una ecuación de segundo grado que cumpla las siguientes condiciones:

a) Sus soluciones son: $x = 3$ y $x = 7$. b) Sus soluciones son: $x = 3$ y $x = 7$; y el coeficiente $c = 42$.

c) Sus soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$. d) Sus soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$; y el coeficiente $a = 3$.

7. Discute y resuelve en función de p

a) $x^2+px=0$. b) $x^2-4x+p=0$. c) $px^2+4x-4=0$.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-2x^2+4x-8=0$. b) $4x^3+4x^2-3x=0$. c) $2x^3-10x^2+14x-6=0$.

d) $(x^2+2x)(x^2-5x+4)=0$. e) $x^3+3x^2-1=0$. f) $(x-1)(4x^2-1)(x^3+8)=0$.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^4+5x^2-36=0$. b) $x^4-21x^2+80=0$. c) $x^4-25x^2=0$. d) $x^4-81=0$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x}+3x=4$. b) $\sqrt{x+5}-3=0$. c) $1-3x=\sqrt{3x-1}$.

d) $2\sqrt{x+3}-5=x-10$. e) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{3x+1}$. f) $\sqrt{15-x}-2x=6$.

11. Resuelve la ecuación: $(\sqrt{x}-4)(7-4\sqrt{x})=5$.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a) $|2x+1|=5$.   b) $|x^2+2x|=4x$.   c) $\frac{x+1}{2}=|x|$.   d) $\frac{|x-2|}{x}=1$.

13. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a) $|x+3|=2x-1$.   b) $|x^2-3x|=4$.   c) $|x+6|=x^2$.   d) $\frac{2}{x}=|x-1|$.

14. La suma de tres múltiplos consecutivos de 3 vale 477. ¿Qué números son?

15. Un grifo llena un depósito en 6 horas; si otro grifo tarda 4 horas en llenar un depósito igual.
a) ¿Cuánto llenan entre los dos en una hora?
b) ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre los dos juntos?

16. Entre dos caños llenan una piscina en 12 horas. Si un caño solo tarda 10 horas más que el otro, ¿cuánta tardaría cada uno por separado?

17. El doble de un número más el cuadrado de su mitad es igual a 45. Halla el número.

18. Descompón el número 40 en dos partes tales que su producto sea 256.

19. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo antideslizante de 1,5 m de ancho. La piscina es 15 m más larga que ancha. Si la superficie del pasillo es de 114 m^2, ¿cuáles son las dimensiones de la piscina?

20. Con un trozo rectangular de cartón, que es 10 cm más largo que ancho, se construye una caja sin tapa de volumen 3000 cm^3, cortando un cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina y doblando por los bordes. ¿Qué dimensiones tenía el cartón?

21. Las expresiones $I(x)=-2x^2+51x$ y $G(x)=x^2-3x+96$, con $0\le x\le 18$, representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, *x*, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.
a) ¿Para qué valores de *x*, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?
b) Determina la expresión que representa los beneficios en función de *x*. Indica los beneficios o pérdidas cuando $x = 2$, $x = 10$; $x = 17$.