SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3(x-2)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}(3-2x)$. b) $\frac{2-x}{2}-\frac{4x-3}{5}=2x-5-\frac{1}{4}(2x-3)$.

Nota: En muchos de los problemas propuestos pueden emplearse recursos informáticos para comprobar tu resultado. Hazlo en algunos.

Solución:

a) Se quitan los denominadores multiplicando por 6, después se resuelven los paréntesis; por último, se trasponen términos y se despeja.

$$3(x-2)-\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}(3-2x) \Rightarrow 6\cdot 3(x-2)-6\cdot\frac{1}{2}x=6\cdot\frac{2}{3}(3-2x) \Rightarrow 18x-36-3x=12-8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18x-3x+8x=12+36 \Rightarrow 23x=48 \Rightarrow x=\frac{48}{23}.$$

b) Se quitan los denominadores multiplicando por 20:

$$20\cdot\frac{2-x}{2}-20\cdot\frac{4x-3}{5}=20\cdot 2x-20\cdot 5-20\cdot\frac{1}{4}(2x-3) \to \text{(hay que tener cierto cuidado con los signos)}$$

$$\to 10\cdot(2-x)-4\cdot(4x-3)=40x-100-5\cdot(2x-3) \Rightarrow 20-10x-16x+12=40x-100-10x+15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10x-16x-40x+10x=-100+15-20-12 \Rightarrow -56x=-117 \Rightarrow x=\frac{117}{56}.$$

2. Opera las siguientes expresiones algebraicas y después resuelve la ecuación obtenida.

a) $x^2=\frac{x}{2}+3$. b) $(x-3)\cdot(x+2)=6$. c) $2x-1=\frac{-4}{x-3}$. d) $x+\frac{1}{x}=2$.

Solución:

a) $x^2=\frac{x}{2}+3 \to$ (multiplicando por 2) $\to 2x^2=x+6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2-x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{1\pm 7}{4}=\begin{cases}-3/2\\ 2\end{cases}.$$

b) $(x-3)\cdot(x+2)=6 \Rightarrow x^2-x-6=6 \Rightarrow x^2-x-12=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}-3\\ 4\end{cases}$.

c) $2x-1=\frac{-4}{x-3} \to$ (multiplicando por $x-3$) $\to (x-3)\cdot(2x-1)=-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x^2-7x+3=-4 \Rightarrow 2x^2-7x+7=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49-56}}{2} \to \text{No tiene solución.}$$

d) $x+\frac{1}{x}=2 \to$ (multiplicando por x) $\to x^2+1=2x \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$, doble.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-5)(-2x+3)=0$. b) $\frac{x^2-x-2}{x+4}=0$. c) $\frac{x}{x-3}=\frac{2x}{x-2}$. d) $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{8}{x}$.

Solución:

a) Un producto vale 0 cuando uno de sus factores es 0:

$$(x-5)(-2x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \to x=5 \\ -2x+3=0 \to x=3/2 \end{cases}.$$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x+4}=0 \to$ (Una fracción es 0 cuando su numerador vale 0) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}.$$

c) $\dfrac{x}{x-3}=\dfrac{2x}{x-2} \to$ (multiplicando en cruz) $\Rightarrow x(x-2)=2x(x-3) \Rightarrow x^2-2x=2x^2-6x \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0\\ x=4\end{cases}.$$

d) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{8}{x} \to$ (operando) $\Rightarrow \dfrac{x^2-(x-2)}{(x-2)\cdot x}=\dfrac{8}{x} \Rightarrow \dfrac{x^2-x+2}{(x-2)\cdot x}=\dfrac{8}{x} \to$ (multiplicando y simplificando) $\Rightarrow (x^2-x+2)\cdot\cancel{x}=8(x-2)\cdot\cancel{x} \Rightarrow x^2-x+2=8x-16 \Rightarrow x^2-9x+18=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3\\ x=6\end{cases}.$

<u>Observaciones:</u>
1. Cuando se simplifica una ecuación hay la posibilidad de que se pierda alguna solución; en este caso, la solución x = 0. Aquí no sucede, pues x no puede tomar el valor 0 al estar como denominador de una fracción.
2. Una manera más rápida de resolver esta ecuación es:

$$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{8}{x} \Rightarrow \frac{x}{x-2}=\frac{8}{x}+\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x-2}=\frac{9}{x} \Rightarrow x^2=9x-18.$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x}-2$. b) $\dfrac{2x^2-3x}{x+3}=0$. c) $\dfrac{4}{x+3}=0$. d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+1}-2=0$.

<u>Solución</u>:

a) Operando en el segundo miembro: $\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x+1-2x}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{x+1}{x}$.

Multiplicando en cruz: $x^2=x^2+2x+1 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

b) $\dfrac{2x^2-3x}{x+3}=0 \to$ el numerador debe ser 0 $\to 2x^2-3x=0 \Rightarrow x(2x-3)=0 \Rightarrow x=0; x=\dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{4}{x+3}=0 \to$ No tiene solución: el numerador debe ser 0.

d) $\dfrac{x^2-3x}{x^2+1}-2=0 \Rightarrow \dfrac{x^2-3x-2x^2-2}{x^2+1}=0 \Rightarrow -x^2-3x-2=0 \Rightarrow x=-1$ y $x=-2$.

<u>Nota</u>: Puedes utilizar la App **Photomath** para comprobar los resultados.

5. a) Sabiendo que una solución de la ecuación $x^2 + bx - 5 = 0$ es $x = 1$, ¿cuánto vale b? Halla la otra solución.
b) Sabiendo que una solución de la ecuación $x^2 - 3x + c = 0$ es $x = -2$, ¿cuánto vale c? Halla la otra solución.
c) Una solución de la ecuación $ax^2 + 6x = 0$ es $x = 3$, ¿cuánto vale a? Halla la otra solución.
Solución:
a) $x^2 + bx - 5 = 0 \to$ Si $x = 1$ es solución $\Rightarrow 1 + b - 5 = 0 \Rightarrow b = 4$.
La ecuación es $x^2 + 4x - 5 = 0$: la otra solución es $x = -5$.

b) $x^2 - 3x + c = 0 \to$ Si $x = -2$ es solución $\Rightarrow 4 + 6 + c = 0 \Rightarrow c = -10$.
La ecuación es $x^2 - 3x - 10 = 0$: la otra solución es $x = 5$.

c) $ax^2 + 6x = 0 \to$ Si $x = 3$ es solución $\Rightarrow 9a + 18 = 0 \Rightarrow a = -2$.
La ecuación es $-2x^2 + 6x = 0$: la otra solución es $x = 0$.

6. Halla una ecuación de segundo grado que cumpla las siguientes condiciones:
a) Sus soluciones son: $x = 3$ y $x = 7$. b) Sus soluciones son: $x = 3$ y $x = 7$; y el coeficiente $c = 42$.
c) Sus soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$. d) Sus soluciones son: $x = -1$ y $x = 2$; y el coeficiente $a = 3$.
Solución:
Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son las raíces del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Si esas raíces son $x = x_1$ y $x = x_2$, entonces (por el teorema del factor), $P(x) = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$.
Por tanto, la ecuación es $a(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$.
a) Si sus soluciones son $x = 3$ y $x = 7$, la ecuación es $a(x-3)\cdot(x-7) = 0 \Rightarrow a\left(x^2 - 10x + 21\right) = 0$.
La más sencilla se obtiene cuando $a = 1 \to x^2 - 10x + 21 = 0$.

b) La ecuación anterior $a\left(x^2 - 10x + 21\right) = 0 \Leftrightarrow ax^2 - 10ax + 21a = 0$.
Si nos dicen que $c = 42$, entonces $21a = 42 \Rightarrow a = 2$. La ecuación será $2x^2 - 20x + 42 = 0$.

c) Es como el apartado a): si sus soluciones son $x = -1$ y $x = 2 \to$ la ecuación será
$a(x+1)\cdot(x-2) = 0 \Rightarrow a\left(x^2 - x - 2\right) = 0$. La más sencilla se obtiene cuando $a = 1 \to x^2 - x - 2 = 0$.

d) Es como el apartado c).
Si en la ecuación $a\left(x^2 - x - 2\right) = 0$, se hace $a = 3$, resulta: $3x^2 - 3x - 6 = 0$.

7. Discute y resuelve en función de p
a) $x^2 + px = 0$. b) $x^2 - 4x + p = 0$. c) $px^2 + 4x - 4 = 0$.
Solución:
a) $x^2 + px = 0 \Rightarrow x(x + p) = 0 \to$ las soluciones son $x = 0$ y $x = -p$. En el caso de que $p = 0$, la solución $x = 0$ sería doble.

b) $x^2 - 4x + p = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4p}}{2}$.
Si el radicando es positivo hay dos soluciones distintas; esto sucede si $p < 4$.
Si el radicando es 0 hay dos soluciones iguales; esto sucede si $p = 4$. La solución doble es $x = 2$.
Si el radicando es negativo no hay solución; esto sucede si $p > 4$.

c) $px^2+4x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+16p}}{2p}$.

Si el radicando es positivo hay dos soluciones distintas; esto sucede si $p > -1$.
Si el radicando es 0 hay dos soluciones iguales; esto sucede si $p = -1$. La solución doble es $x = 2$.
Si el radicando es negativo no hay solución; esto sucede si $p < -1$.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-2x^2+4x-8=0$. b) $4x^3+4x^2-3x=0$. c) $2x^3-10x^2+14x-6=0$.
d) $(x^2+2x)(x^2-5x+4)=0$. e) $x^3+3x^2-1=0$. f) $(x-1)(4x^2-1)(x^3+8)=0$.

Solución:

a) $x^3-2x^2+4x-8=0$ → Se buscan soluciones enteras entre los divisores de 8: ±1: ±2 ±4 ±8.
→ ¿x = 1? → NO: $1-2+4-12\neq 0$. → ¿x = –1? → NO: $-1-2-4-12\neq 0$.
→ ¿x = 2? → SÍ: $8-8+8-8=0 \Rightarrow x-2$ es un factor de la expresión → se divide:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \left(x^3-2x^2+4x-8\right)=(x-2)\left(x^2+4\right).$$

Por tanto,

$$x^3-2x^2+4x-8=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+4\right)=0.$$

Como el segundo factor nunca se hace 0, no hay más raíces. Solo es solución $x = 2$.

b) $4x^3+4x^2-3x=0$ → se saca factor común: $x\left(4x^2+4x-3\right)=0$.

Resolviendo $4x^2+4x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\dfrac{-4\pm 8}{8}=\begin{cases}-3/2\\ 1/2\end{cases}$.

Las soluciones de la ecuación dada son: $x = 0$, $x=-\dfrac{3}{2}$ y $x=\dfrac{1}{2}$.

c) $2x^3-10x^2+14x-6=0$ → Se buscan soluciones enteras entre los divisores de –6: ±1; ±2; ±3; ±6.
→ ¿x = 1? → SÍ: $2-10+14-6=0 \Rightarrow x-1$ es un factor de la expresión → se divide:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -10 & 14 & -6 \\ 1 & & 2 & -8 & 6 \\ \hline & 2 & -8 & 6 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow 2x^3-10x^2+14x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(2x^2-8x+6\right)=0.$$

Resolviendo $2x^2-8x+6=0 \Rightarrow x=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{4}=\dfrac{8\pm 4}{4}=\begin{cases}1\\ 3\end{cases}$.

Las soluciones de la ecuación dada son: x = 1, doble; x = 3.

d) $(x^2+2x)(x^2-5x+4)=0$ → Cada uno de los factores puede ser 0.
→ $x^2+2x=0 \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x = 0$, $x = -2$.
→ $x^2-5x+4=0 \Rightarrow x = 1$, $x = 4$.

e) $x^3+3x^2-1=0$ → Se buscan soluciones enteras entre los divisores de 1: 1; –1.
→ ¿x = 1? → NO: $1+3-1\neq 0$. → ¿x = –1? → NO: $-1+3-1\neq 0$.
Como no tiene soluciones enteras no puede encontrase la solución.

f) $(x-1)(4x^2-1)(x^3+8)=0 \to$ Cada uno de los factores puede ser 0.
$\to x-1=0 \Rightarrow x=1$.
$\to 4x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$.
$\to x^3+8=0 \Rightarrow x^3=-8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-8} \Rightarrow x=-2 \Rightarrow x=1, x=4$.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $x^4+5x^2-36=0$. b) $x^4-21x^2+80=0$. c) $x^4-25x^2=0$. d) $x^4-81=0$.
Solución:
En todos los dos primeros casos se hace el cambio $x^2=t$.

a) $x^4+5x^2-36=0 \Leftrightarrow t^2+5t-36=0 \Rightarrow t=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2}=\frac{-5\pm13}{2}=\begin{cases}-9\\ 4\end{cases}$.

$\to$ Si $t=-9 \Rightarrow x^2=-9$: No puede ser.
$\to$ Si $t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$.
Esta ecuación solo tiene dos soluciones reales.

b) $x^4-21x^2+80=0 \Leftrightarrow t^2-21t+80=0 \Rightarrow t=\frac{21\pm\sqrt{21^2-4\cdot1\cdot80}}{2}=\frac{21\pm11}{2}=\begin{cases}16\\ 5\end{cases}$.

$\to$ Si $t=16 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm4$.
$\to$ Si $t=5 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$.
Las soluciones son: $x = 2$; $x = 2$; $x=-\sqrt{5}$; $x=\sqrt{5}$.

c) $x^4-25x^2=0 \to$ sacando factor común $\to x^2\left(x^2-25\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \to x=0 \\ x^2-25 \to x=-5; x=5 \end{cases}$.

d) $x^4-81=0 \to$ despejando $\to x^4=81 \Rightarrow x=\sqrt[4]{81} \Rightarrow x=-3; x=3$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $\sqrt{x}+3x=4$. b) $\sqrt{x+5}-3=0$. c) $1-3x=\sqrt{3x-1}$.
d) $2\sqrt{x+3}-5=x-10$. e) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{3x+1}$. f) $\sqrt{15-x}-2x=6$.
Solución:
Para resolver estas ecuaciones es imprescindible saber operar correctamente. Hay que saber operar con raíces y hacer bien el cuadrado de productos, de sumas y restas.

a) $\sqrt{x}+3x=4 \to$ (se aísla la raíz y se hace el cuadrado) $\to \sqrt{x}=4-3x \Rightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=\left(4-3x\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x=16-24x+9x^2 \Rightarrow\Rightarrow 9x^2-25x+16=0 \Rightarrow x=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot9\cdot16}}{2\cdot9}=\frac{25\pm7}{18}=\begin{cases}1\\ 16/9\end{cases}.$$

El valor $x=\frac{2}{3}$ no es válido como solución, pues: $\sqrt{\frac{16}{9}}+3\cdot\frac{16}{9}=\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{20}{3}\neq 4$ (Habría que tomar el signo menos de la raíz, pero, en las ecuaciones, el signo que se considera es el inicial; en este caso positivo).

b) $\sqrt{x+5}-3=0 \to$ (se aísla la raíz) $\to \sqrt{x+5}=3 \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2=3^2 \Rightarrow x+5=9 \Rightarrow x=4$.

c) $1-3x=\sqrt{3x-1}$ $\to$ (se eleva al cuadrado) $\to$ $(1-3x)^2=\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 \Rightarrow 1-6x+9x^2=3x-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 9x^2-9x+2=0 \Rightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{18}=\frac{9\pm 3}{18}=\begin{cases}2/3\\1/3\end{cases} \to \text{Solo vale } x=\frac{1}{3}.$$

La solución $x=\frac{2}{3}$ no es válida, pues: $1-3x \to 1-3\cdot\frac{2}{3}=-1$; pero $\sqrt{3x-1}=\sqrt{3\cdot\frac{2}{3}-1}=\sqrt{1}=1$.

d) $2\sqrt{x+3}-5=x-10$ $\to$ (se aísla la raíz y se hace el cuadrado) $\to$

$$\to 2\sqrt{x+3}=x-5 \Rightarrow \left(2\sqrt{x+3}\right)^2=(x-5)^2 \Rightarrow 4(x+3)=x^2-10x+25 \Rightarrow 4x+12=x^2-10x+25$$

$$\Rightarrow x^2-14x+13=0 \Rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{196-52}}{2}=\frac{14\pm 12}{2}=\begin{cases}1\\13\end{cases}.$$

Veamos si valen las dos soluciones.

Si $x = 1 \to 2\sqrt{1+3}-5=1-10 \Rightarrow 4-5=1-9$: no vale.

Si $x = 13 \to 2\sqrt{13+3}-5=13-10 \Rightarrow 8-5=13-9$ $\to$ esta es la solución.

Nota: Con **GeoGebra**, tecleando Resuelve(2sqrt(x+3) – 5 = x–10) se obtiene {x=13}.

e) $2\sqrt{x-1}=8-\sqrt{3x+1}$ $\to$ (se eleva al cuadrado) $\to$ $\left(2\sqrt{x-1}\right)^2=\left(8-\sqrt{3x+1}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x-1)=64-16\sqrt{3x+1}+(3x+1)$ $\to$ (se opera y se aísla la raíz; se vuelve a elevar al cuadrado)

$$\to 4x-4=64-16\sqrt{3x+1}+3x+1 \Rightarrow x-69=-16\sqrt{3x+1} \Rightarrow (x-69)^2=\left(-16\sqrt{3x+1}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-138x+4761=256(3x+1) \Rightarrow x^2-906x+4505=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{906\pm\sqrt{906^2-4\cdot 4505}}{2}=\frac{906\pm\sqrt{802816}}{2}=\frac{906\pm 896}{2}=\begin{cases}5\\901\end{cases}.$$

Veamos si valen las dos soluciones.

Si $x = 5 \to 2\sqrt{5-1}=8-\sqrt{3\cdot 5+1} \Rightarrow 4=8-4$: sí vale.

Si $x = 901 \to 2\sqrt{901-1}=8-\sqrt{3\cdot 901+1} \Rightarrow 60=8-52$ $\to$ No vale.

f) $\sqrt{15-x}-2x=6 \Rightarrow \sqrt{15-x}=6+2x \Rightarrow \left(\sqrt{15-x}\right)^2=(6+2x)^2 \Rightarrow 15-x=36+24x+4x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4x^2+25x+21=0 \Rightarrow x=\frac{-25\pm\sqrt{625-4\cdot 4\cdot 21}}{2\cdot 4}=\frac{-25\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{-25\pm 17}{8}=\begin{cases}-1\\21/4\end{cases}$$

Solo es válida la solución $x = -1$.

11. Resuelve la ecuación: $\left(\sqrt{x}-4\right)\left(7-4\sqrt{x}\right)=5$.

Solución:

$\left(\sqrt{x}-4\right)\left(7-4\sqrt{x}\right)=5 \Rightarrow 7\sqrt{x}-4x-28+16\sqrt{x}=5 \Rightarrow 4x-23\sqrt{x}+33=0$.

Si se hace el cambio $\sqrt{x}=t$, con lo que la ecuación quedaría $4t^2-23t+33=0 \Rightarrow$

$$t=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4\cdot 4\cdot 33}}{2\cdot 4}=\frac{23\pm\sqrt{529-528}}{8}=\frac{23\pm 1}{8}=\begin{cases}3\\11/4\end{cases}.$$

Si $t=\sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9$; si $t=\sqrt{x}=\frac{11}{4} \Rightarrow x=\frac{121}{16}$.

→ También podría hacerse así: $4x-23\sqrt{x}+33=0 \Rightarrow 4x+33=23\sqrt{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (4x+33)^2=\left(23\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow 16x^2-265x+1089=0 \Rightarrow \ldots\ x=9;\, x=\frac{121}{16}.$$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a) $|2x+1|=5$. b) $|x^2+2x|=4x$. c) $\frac{x+1}{2}=|x|$. d) $\frac{|x-2|}{x}=1$.

<u>Solución</u>:

a) $|2x+1|=5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=5 \Rightarrow x=2 \\ 2x+1=-5 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$. Las soluciones son x = 2 y x = –3. (Compruébalo).

b) $$|x^2+2x|=4x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=4x \\ x^2+2x=-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ x^2+6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-2)=0 \to x=0; x=2 \\ x(x+6)=0 \to x=0; x=-6 \end{cases}.$$

c) $$\frac{x+1}{2}=|x| \Leftrightarrow x+1=2\cdot|x| \Rightarrow \begin{cases} x+1=2x \\ x+1=-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=x \\ 3x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=1;\, x=-\frac{1}{3}.$$

d) $$\frac{|x-2|}{x}=1 \Leftrightarrow |x-2|=x \Rightarrow \begin{cases} x-2=x \\ x-2=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2=0 \\ 2x=2 \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones con valores absolutos:

a) $|x+3|=2x-1$. b) $|x^2-3x|=4$. c) $|x+6|=x^2$. d) $\frac{2}{x}=|x-1|$.

<u>Solución</u>:

a) $$|x+3|=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=2x-1 \\ x+3=-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x=-4 \\ 3x=-2 \end{cases} \Rightarrow x=4;\, x=-\frac{2}{3}.$$

b) $$|x^2-3x|=4 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x=4 \to x^2-3x-4=0 \\ x^2-3x=-4 \to x^2-3x+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \to x=-1, x=4 \\ x=\frac{3\pm\sqrt{9-16}}{2} \to \text{No tiene solución} \end{cases}.$$

c) $$|x+6|=x^2 \Rightarrow \begin{cases} x+6=x^2 \to x^2-x-6=0 \\ x+6=-x^2 \to x^2+x+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2} \to x=-2, x=3 \\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-24}}{2} \to \text{No tiene solución} \end{cases}.$$

d) $$\frac{2}{x}=|x-1| \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x}=x-1 \\ -\frac{2}{x}=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=x^2-x \\ -2=x^2-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{1\pm 3}{2}\to x=-1, x=2 \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}\to \text{No tiene solución} \end{cases} \to \text{La solución } x=-1 \text{ no es válida.}$$

14. La suma de tres múltiplos consecutivos de 3 vale 477. ¿Qué números son?
Solución:
Tres múltiplos consecutivos de 3 son: x, $x + 3$ y $x + 6$.

Como $x+x+3+x+6=477 \Rightarrow 3x=468 \Rightarrow x=\dfrac{468}{3}=156$.

Los números son: 156, 159 y 162.

15. Un grifo llena un depósito en 6 horas; si otro grifo tarda 4 horas en llenar un depósito igual.
a) ¿Cuánto llenan entre los dos en una hora?
b) ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre los dos juntos?
Solución:

a) El primero grifo llena $\dfrac{1}{6}$ del depósito en 1 h; el segundo llena $\dfrac{1}{8}$.

Entre los dos llenan: $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{10}{24}=\dfrac{5}{12}$ del depósito $\to$ 5 partes de 12.

b) Si en 1 hora llenan $\dfrac{5}{12}$ de depósito, para llenarlo entero tardarán $\dfrac{12}{5}=2,4$ h = 2 h, 24 min.

Si no entiendes este razonamiento, plantéalo como una regla de tres.

$\to$ Si entre los dos grifos llenan $\dfrac{5}{12}$ de depósito en 1 hora;

Llenarán todo el depósito, $\dfrac{12}{12}$ en h horas $\Rightarrow h=\dfrac{\frac{12}{12}\cdot 1}{\frac{5}{12}}=\dfrac{12}{5}=2,4$ h.

De otra manera, planteando una ecuación.

Si entre los dos tardarán h horas, en una hora llenarían $\dfrac{1}{h}$ del depósito.

Como se sabe que entre los dos llenan $\dfrac{5}{12}$ de depósito $\to \dfrac{1}{h}=\dfrac{5}{12}\Rightarrow h=\dfrac{12}{5}$.

16. Entre dos caños llenan una piscina en 12 horas. Si un caño solo tarda 10 horas más que el otro, ¿cuánta tardaría cada uno por separado?
Solución:
Si el caño de mayor cauda tarda x horas, el otro tardará $x + 10$ horas.

Por separado, en 1 hora, cada uno llenaría $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{1}{x+10}$, respectivamente.

Los dos a la vez llenarían, en una hora, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+10}$.

Como se sabe que entre los dos tardan 12 horas, en 1 hora llenará $\dfrac{1}{12}$ de la piscina.

Por tanto: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+10}=\dfrac{1}{12}\to$ (operando) $\dfrac{x+10}{x(x+10)}+\dfrac{x}{x(x+10)}=\dfrac{1}{12}\Rightarrow \dfrac{2x+10}{x(x+10)}=\dfrac{1}{12}\Rightarrow$

$$24x+120=x(x+10)\Rightarrow 24x+120=x^2+10x\Rightarrow x^2-14x-120=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{14\pm\sqrt{196+480}}{2}=\frac{14\pm 26}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=20\\ x=-6\end{cases}$$ → El valor negativo no tiene sentido.

Por tanto, el caño de mayor caudal emplearía 20 h en llenar la piscina; el otro, necesitaría 30 h.

17. El doble de un número más el cuadrado de su mitad es igual a 45. Halla el número.

Solución:

Si el número buscado es *x*, se cumple la relación: $2x+\left(\frac{x}{2}\right)^2=45$.

Operando:

$$2x+\left(\frac{x}{2}\right)^2=45\ \Rightarrow\ 2x+\frac{x^2}{4}=45\Rightarrow 8x+x^2=180\Rightarrow x^2+8x-180=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{-8\pm\sqrt{64+720}}{2}=\frac{-8\pm 28}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=10\\ x=-18\end{cases}$$ → El número buscado puede ser 10 o –18.

18. Descompón el número 40 en dos partes tales que su producto sea 256.

Solución:

Si una de las partes es *x*, la otra será 40 – *x*.

Como su producto debe valer 256, se obtiene la ecuación: $x\cdot(40-x)=256$.

$$x\cdot(40-x)=256\ \Rightarrow\ 40x-x^2=256\Rightarrow x^2-40x+256=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{40\pm\sqrt{1600-1024}}{2}=\frac{40\pm 24}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=32\\ x=8\end{cases}.$$

Los números pedidos son 32 y 8.

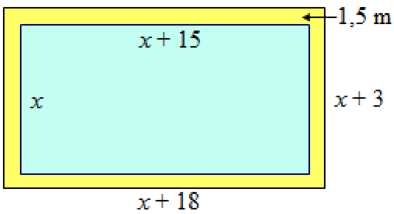
19. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo antideslizante de 1,5 m de ancho. La piscina es 15 m más larga que ancha. Si la superficie del pasillo es de 114 m^2, ¿cuáles son las dimensiones de la piscina?

Solución:

Si el ancho de la piscina son *x* metros; su largo será de *x* + 15 m.

Si se incluye el pasillo que la bordea, sus dimensiones serán de *x* + 3 por *x* + 18.

La superficie el pasillo es la diferencia entre el rectángulo de fuera (que incluye el pasillo) y el rectángulo interior (el de la piscina)



Por tanto:

$$\text{Superficie del pasillo} = (x+3)\cdot(x+18)-x\cdot(x+15)=114\ \Rightarrow$$

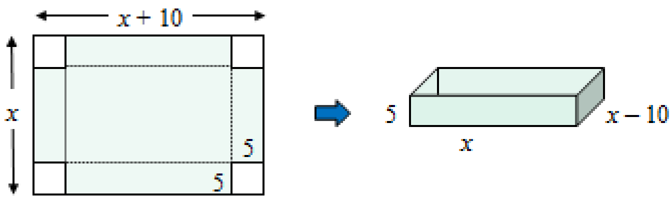
$$x^2+21x+54-x^2-15x=114\ \Rightarrow\ 6x=60\Rightarrow x=10\ \text{m}$$

La piscina mide 10 por 25 m.

20. Con un trozo rectangular de cartón, que es 10 cm más largo que ancho, se construye una caja sin tapa de volumen 3000 cm^3, cortando un cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina y doblando por los bordes. ¿Qué dimensiones tenía el cartón?

Solución:

La situación se representa en la figura adjunta.



Si el ancho del cartón es *x*, su largo será *x* + 10.

Si se cortan 5 cm por cada extremo, el

largo será de $x + 10 - 5 \cdot 2 = x$; el ancho de $x - 2 \cdot 5 = x - 10$; el alto de 5 cm.
El volumen de la caja en función de x es: $V = x \cdot (x-10) \cdot 5 = 5x^2 - 50x$.

Como $V = 5x^2 - 50x = 3000 \Rightarrow 5x^2 - 50x - 3000 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x - 600 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100+2400}}{2} = \begin{cases} 30 \\ -7,5 \end{cases}.$$

Las dimensiones del cartón eran de 30 × 40 cm.

21. Las expresiones $I(x) = -2x^2 + 51x$ y $G(x) = x^2 - 3x + 96$, con $0 \le x \le 18$, representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años, x, transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.
a) ¿Para qué valores de x, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?
b) Determina la expresión que representa los beneficios en función de x. Indica los beneficios o pérdidas cuando $x = 2$, $x = 10$; $x = 17$.
Solución:
a) Si los ingresos coinciden con los gastos:

$$I(x) = G(x) \Rightarrow -2x^2 + 51x = x^2 - 3x + 96 \Rightarrow 3x^2 - 54x + 96 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 3 \cdot 96}}{6} = \begin{cases} 2 \\ 16 \end{cases}.$$

En los años 2 y 16 los ingresos coinciden con los gastos.

b) El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos; luego:

$$B(x) = I(x) - G(x) \Rightarrow B(x) = -2x^2 + 51x - \left(x^2 - 3x + 96\right) \Rightarrow B(x) = -3x^2 + 54x - 96.$$

Para $x = 2$: $B(2) = -3 \cdot 2^2 + 54 \cdot 2 - 96 = 0$.

Para $x = 10$: $B(10) = -3 \cdot 10^2 + 54 \cdot 10 - 96 = 144 \rightarrow$ ganancia de 144000 euros.

Para $x = 17$: $B(10) = -3 \cdot 17^2 + 54 \cdot 17 - 96 = -45 \rightarrow$ pérdidas de 45000 euros.