FUNCIONES EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

Muchas personas "desconectan" con estas funciones; no son sencillas. La calculadora y el ordenador te ayudarán a entenderlas: utiliza esas herramientas para dibujarlas y aprender la forma de sus gráficas.

1. Función exponencial

Una función es de tipo exponencial cuando la variable independiente figura en el exponente.
La más sencilla es de la forma

$f(x)=a^x \Leftrightarrow y=a^x$, $a>0$ y $a\neq 1$.

Ejemplo:

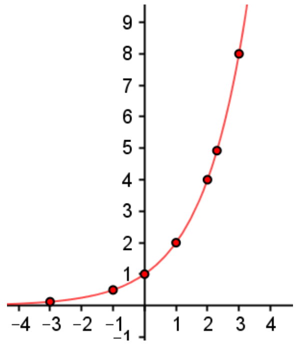
$f(x)=2^x$ es la exponencial de base 2.

Algunos valores son (usa la calculadora para comprobarlo):

$f(1)=2^1=2$; $f(5)=2^5=32$; $f(-3)=2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$;

$f(2,3)=2^{2,3}=4,924577653$.

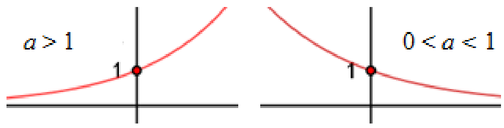
Otros de sus puntos son: (0, 1), (2, 4), (3, 8) y (–1, 1/2).
Su gráfica es la de la derecha.



Características fundamentales de la función exponencial $f(x)=a^x$

- Su dominio es **R**: Dom(*f*) = **R**.
- Siempre toma valores positivos: $f(x)=a^x>0$, para todo *x*.
- Corta al eje *OY* en el punto *y* = 1, pues $f(0)=a^0=1$.
- Crecimiento y decrecimiento:

Si la base *a* > 1, la función siempre es creciente.
Si la base 0 < *a* < 1, la función es decreciente.



- El eje *OX*, la recta *y* = 0, es una asíntota horizontal: hacia $-\infty$ si *a* > 1, y hacia $+\infty$ si 0 < *a* < 1.

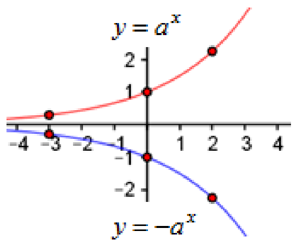
Observaciones:

1) Para trabajar correctamente con las funciones exponenciales y logarítmicas necesitas manejar bien las propiedades de la potenciación.

2) La función $f(x)=a^{-x}$ es idéntica a $f(x)=\dfrac{1}{a^x}$, y la misma que $f(x)=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$. Así, por ejemplo:

$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=\dfrac{1}{2^x}=2^{-x}$. En consecuencia, $f(x)=a^{-x}$ (con *a* > 1) es decreciente, pues $\dfrac{1}{a}<1$.

3) La función $f(x)=-a^x$ siempre es negativa. Es la simétrica de $f(x)=a^x$ respecto del eje *OX*.



4) $(-a)^x$ no está definida: solo puede hallarse para valores sueltos de *x*.

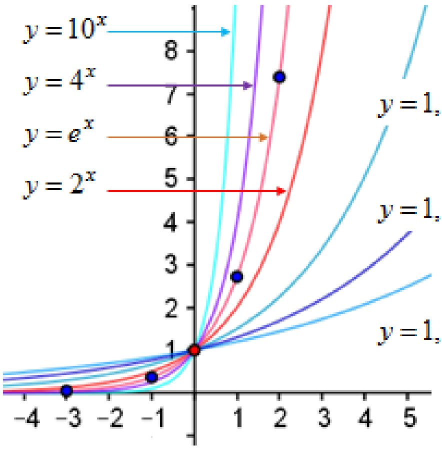
5) Para trabajar con estas funciones es imprescindible manejar la calculadora científica. En ellas, sobre las teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$, aparecen las funciones $f(x)=10^x$ y $f(x)=e^x$. Para trabajar con otras bases hay que utilizar la tecla $\boxed{\wedge}$. Así, por ejemplo, para calcular $2^{2,3}$ se teclea 2^2.3 = 4,924577653.

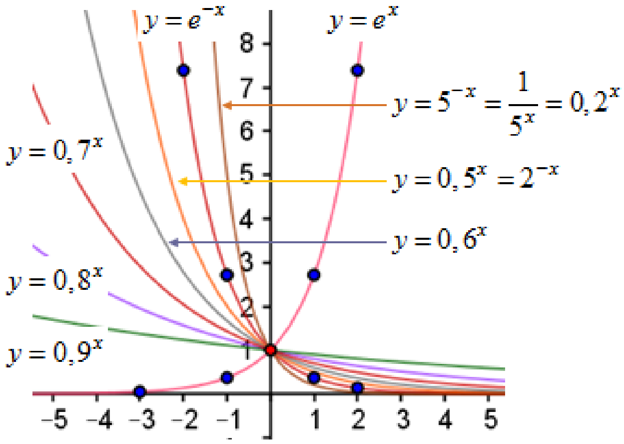
→ Para escribir el número *e* pulsa en la calculadora: SHIFT ln 1 = … saldrá: 2,718281828.

- Las características descritas pueden estudiarse y deducirse a partir de la gráfica de algunas funciones. Con **GeoGebra** se trazan con facilidad.

Ejemplos:

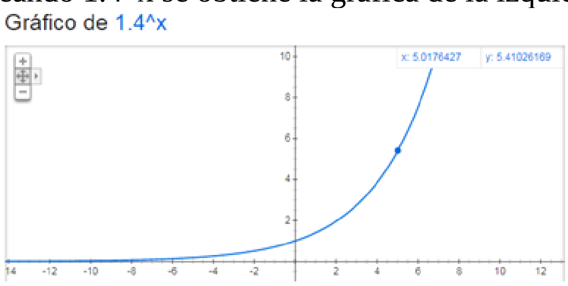
a) Las gráficas que siguen (las de la izquierda) son de la forma $y = a^x$, con $a > 1$.
Observa que:
1) Todas son crecientes (puede hablarse de crecimiento exponencial). Cuando a se hace más grande el crecimiento es más pronunciado.
2) Todas son positivas: su gráfica está por encima del eje OX.
3) Todas pasan por el punto (0, 1).
4) Todas tienen al eje OX por asíntota cuando la x se hace muy grande y negativa (si $x \to -\infty$).
$\to$ Se han marcado algunos puntos de $y = e^x$:
(0, 1), $(1, e) \equiv (1, 2{,}72)$; $(2, e^2) \equiv (2, 7{,}39)$; $(-1, 1/e) \equiv (-1, 0{,}37)$; $(-2, 1/e^2) \equiv (-2, 0{,}14)$.

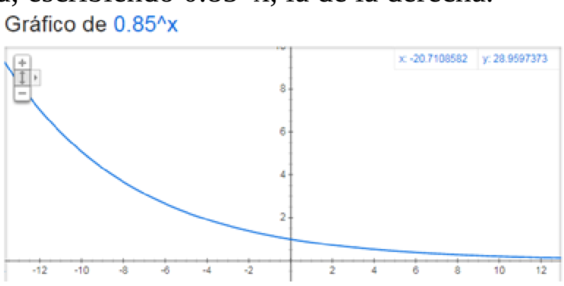




b) Las gráficas de la derecha son de la forma $y = a^x$, con $0 < a < 1$.
Observa que:
1) Todas son decrecientes (se habla de decrecimiento exponencial). Cuando a se hace más pequeña el decrecimiento es más pronunciado.
2) Todas son positivas: su gráfica está por encima del eje OX.
3) Todas pasan por el punto (0, 1).
4) Todas tienen al eje OX por asíntota cuando la x se hace muy grande y positiva (si $x \to +\infty$).
$\to$ Se han marcado algunos puntos de $y = e^{-x}$:
(0, 1), $(-1, e) \equiv (-1, 2{,}72)$; $(-2, e^2) \equiv (-2, 7{,}39)$; $(1, 1/e) \equiv (1, 0{,}37)$; $(2, 1/e^2) \equiv (2, 0{,}14)$.
También puede observarse que $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ son simétricas respecto del eje OY; y lo mismos puede decirse de $y = 2^x$ e $y = 2^{-x}$.

Nota: Todas estas funciones pueden dibujarse con Google.
Tecleando 1.4^x se obtiene la gráfica de la izquierda; escribiendo 0.85^x, la de la derecha.





Funciones relacionadas con la exponencial

- La función general $f(x) = a^{g(x)}$ está definida siempre que lo esté $g(x)$; $a > 0$ y $a \neq 1$.

Ejemplos:

a) $f(x) = 2^{3-x}$ está definida para todo número real.

b) $f(x) = 2^{\frac{1}{3-x}}$ está definida para todo número real distinto de 3: Dom (f) = **R** − {3}.

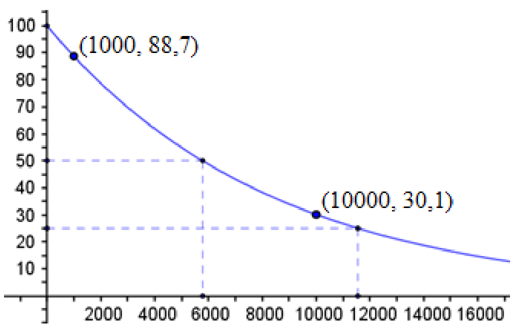
- La función $f(x) = C \cdot a^{kx}$, con $k > 0$, se presenta en procesos de capitalización o de crecimiento de poblaciones; con $k < 0$ está asociada a fenómenos de desintegración o de pérdida del valor de determinados bienes.

Ejemplos:

a) La función $C(t) = C_0(1+r)^t$ da el capital acumulado al cabo de t años a una tasa de interés anual r (en tanto por uno), para un capital inicial C_0. Así, un capital de 1000 €, al 6 % anual (r = 0,06), se convierte al cabo de 8 años en $C(8) = 1000(1+0,06)^8 = 1000 \cdot (1,06)^8 = 1593,85$ €.

b) A interés continuo, el capital acumulado al cabo de t años es: $C(t) = C_0 \cdot e^{rt}$.
Así, los 1000 € del ejemplo anterior, al mismo 6 % anual, se convierten al cabo de 8 años en
$C(8) = 1000 \cdot e^{0,06 \cdot 8} = 1000 \cdot e^{0,48} = 1616,07$ €.
Lo mismo sucede con los fenómenos de crecimiento continuo (en los que el aumento no se contabiliza solo al final de un periodo de tiempo –anual, trimestral, …– sino en cada instante). Así puede evolucionar, en determinadas condiciones, el crecimiento de la masa forestal de un bosque o el de determinadas poblaciones silvestres, la propagación de epidemias…
Por ejemplo, si un bosque que sufrió un incendio se regenera a un ritmo del 10 % anual, su masa forestal al cabo de t años de iniciado el proceso de regeneración vendrá dada por la función $M(t) = M_0 \cdot e^{0,1t}$, siendo M_0 la masa forestal de partida. Si se supone una masa forestal inicial de 500 m^3 de madera, al cabo de 20 años habrá $M(t) = 500 \cdot e^{0,1 \cdot 20} = 500 \cdot e^2 = 3694,5$ m^3.

c) El decaimiento (desintegración) de sustancias radiactivas también se ajusta a funciones exponenciales del tipo $R(t) = R_0 \cdot e^{kt}$, con $k < 0$.
Un ejemplo clásico es el del carbono 14, que se utiliza para la datación (antigüedad) de restos orgánicos. En concreto, el porcentaje de carbono-14 en restos muertos (plantas, animales…) se ajusta a la fórmula $p(t) = 100 \cdot e^{-0,00012t}$. Esto significa que al cabo de 1000 años, por ejemplo, ese porcentaje será $p(1000) = 100 \cdot e^{-0,12}$ = 88,7 %; y transcurridos 10000 años, del $p(10000) = 100 \cdot e^{-1,2}$ = 30,1 %.
(Para calcular $e^{-1,2}$ puedes teclear en la calculadora:
SHIFT ln (–1.2) = … se obtiene: 0,301194211).



→ Se llama vida media (o periodo de semidesintegración) al tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de una sustancia radiactiva. La vida media del carbono 14 es aproximadamente de 5750 años: 5750 años después de muerto un organismo queda un 50 % del carbono 14 inicial; transcurridos otros 5750 años queda la mitad del 50 %, el 25 %. Por tanto, midiendo el carbono 14 que hay presente en el organismo en cuestión se puede determinar cuánto tiempo hace de su muerte.
(La datación mediante el carbono 14 es frecuente en Arqueología. Para saber más).

2. La función logarítmica

Definición de logaritmo en base *a* de *x*

$\log_a x = b \Leftrightarrow a^b = x$, con $a \neq 1$.

Consecuencias de la definición:

$\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$; $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$; $\log_a a^n = n$, pues $a^n = a^n$.

Las bases usuales son a =10 y a = e. En la calculadora, teclas $\boxed{\log}$ y $\boxed{\ln}$.
Los logaritmos en base 10 se llaman naturales; los logaritmos en base e se llaman neperianos.

- El logaritmo de los números reales menores o iguales que 0 no está definido.

Ejemplos:

a) $\log_2 8 = 3$ ya que $2^3 = 8$. b) $\log_3 81 = 4$ ya que $3^4 = 81$. c) $\log_5 25 = 2$, pues $5^2 = 25$.

d) $\log 10 = 1$ ya que $10^1 = 10$. e) $\log 1 = 0$ ya que $10^0 = 1$. f) $\ln e^4 = 4$, pues $e^4 = e^4$.

→ Usando la calculadora:

g) $\log 5 = 0,\underline{698970}$. h) $\log 50 = 1,\underline{698970}$. i) $\log 500 = 2,\underline{698970}$.

j) $\ln 5 = 1,609438$. k) $\log 0$ → Math ERROR. l) $\ln(-1)$ → Math ERROR.

Propiedades de los logaritmos

Propiedad 1: $\log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$.

Ejemplos:

a) log 5 + log 20 = log (5 · 20) = log 100 = 2. b) $\log(10x) = \log 10 + \log x = 1 + \log x$.

c) Como 5000 = 1000 · 5 ⇒ $\log 5000 = \log(1000 \cdot 5) = \log 1000 + \log 5 = 3 + \underline{\log 5}$ = 3,$\underline{698970}$.

Propiedad 2: $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Ejemplos:

a) $\log \dfrac{1}{20} = \log 1 - \log 20 = -\log 20 = -1,3010$. b) $\log 10^{-3} = \log \dfrac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = 0 - 3 = -3$.

c) $\log 0,3 = \log \dfrac{3}{10} = \log 3 - \log 10 = 0,4771 - 1 = -0,5229$.

Propiedad 3: $\log_a A^n = n \log_a A$.

Ejemplos:

a) log 5^7 = 7 · log 5 = 7 · 0, 698970 ≈ 4,89. b) ln 3^5 = 5 · ln 3 = 3 · 1,098612 ≈ 5,49.

c) log 10^n = n · log 10 = n · 1 = n → $\log 10 = 1$; $\log 100 = \log 10^2 = 2$; $\log 1000 = \log 10^3 = 3 \ldots$

d) $\ln e^n = n \cdot \ln e = n \cdot 1 = n$ → $\ln e = 1$; $\ln e^2 = 2$; $\ln e^3 = 3 \ldots$; $\ln e^{-1} = -1$; $\ln \dfrac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$.

→ Repara en lo que se ha subrayado más arriba:

$\log 5 = 0,\underline{698970}$; $\log 50 = 1,\underline{698970}$; $\log 500 = 2,\underline{698970}$; $\log 5000 = 3,\underline{698970}$ …

En base 10, cada vez que un número se multiplica por 10 su logaritmo aumenta 1; y si se divide por 10, disminuye en 1. Por tanto, conociendo log 5 puede saberse $\log(5 \cdot 10^n)$ y $\log(5 \cdot 10^{-n})$

$\log(5 \cdot 10^n) = \log 5 + \log 10^n = \log 5 + n$; $\log(5 \cdot 10^{-n}) = \log 5 + \log 10^{-n} = \log 5 - n$.

Así: log 5000000 = 6,$\underline{698970}$ → 5000000 = 5 · 10^6; log 0,05 = log (5·10^{-2}) = 0,$\underline{698970}$ – 2.

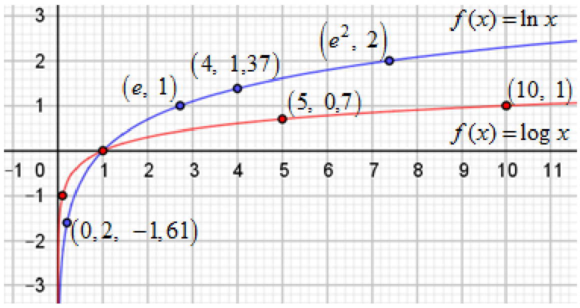
La función logarítmica

La función logarítmica más sencilla es $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow y = \log_a x$, ($a > 0$; $a \neq 1$).
Para las bases usuales, $a = 10$ y $a = e$: $f(x) = \log x$ y $f(x) = \ln x$.

Sus gráficas, cuyos puntos pueden hallarse con la calculadora, se dan a continuación.

→ Para $f(x) = \log x$:
 (0,1, log 0,1) = (0,1, –1); (1, log 1) = (1,0);
 (5, log 5) ≈ (5, 0,7); (10, log 10) = (10, 1).

→ Para $f(x) = \ln x$:
 (0,2, ln 0,2) ≈ (0,2, –1,61); (1, ln 1) = (1,0);
 (e, 1); (4, ln 4) ≈ (4, 1,37); $\left(e^2,\ \ln e^2\right) = \left(e^2,\ 2\right)$.



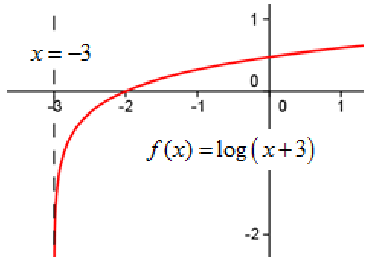
<u>Características fundamentales:</u>

- Su dominio es $\mathbf{R}^+$, los reales positivos: $x > 0$.
- Toma valores que van desde $-\infty$ a $+\infty$: Recorrido = $(-\infty, +\infty)$.
- El eje OY, la recta $x = 0$, es asíntota vertical de su curva, por la izquierda. Cuando x toma valores próximos a 0^+, el valor del logaritmo es "grande" y negativo: log 0,1 = –1; log 0,01 = –2;…
- Si $a > 1$ (que es lo usual), la función es creciente. (Si $0 < a < 1$, la función sería decreciente).

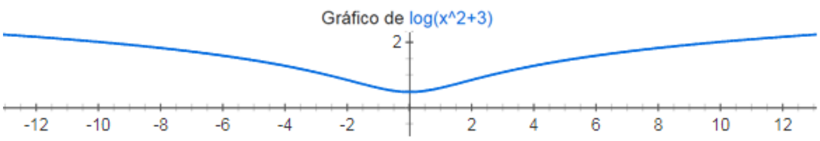
<u>La función general</u> $f(x) = \log_a g(x)$ está definida siempre que $g(x) > 0$.

Ejemplos:

a) $f(x) = \log(x+3)$ está definida siempre que $x+3>0$; esto es, cuando $x > -3$. Luego, su dominio es el intervalo $(-3, +\infty)$.
Cuando x toma valores próximos a -3^+ (por la derecha de –3) el valor del logaritmo es más grande y negativo:
 log (3 – 2,9) = –1; log (3 – 2,99) = –2; …
Luego, la recta $x = -3$ es asíntota vertical.



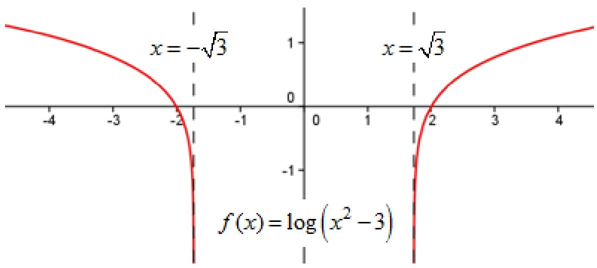
b) $f(x) = \log\left(x^2+3\right)$ está definida siempre, pues $x^2+3>0$ para todo x. Esta función no tiene asíntota vertical, pues en ningún caso x^2+3 se acerca a 0. (En Google se ve así).



c) $f(x) = \log\left(x^2-3\right)$ está definida siempre que $x^2-3>0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

→ $x^2-3=0$ si $x = -\sqrt{3}$ y $x = +\sqrt{3}$.

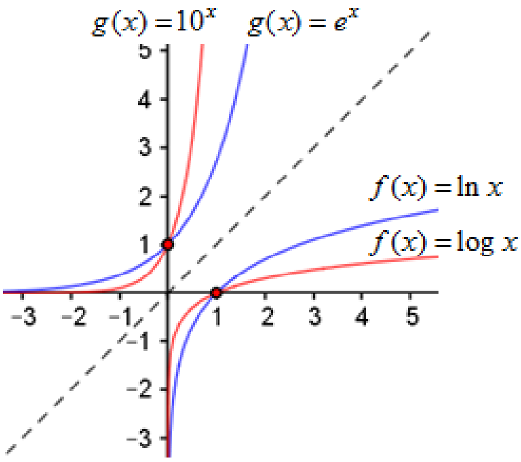
Cuando x^2-3 toma valores muy próximos a 0^+, el valor de $f(x) = \log\left(x^2-3\right)$ es cada vez más grande y negativo; esto es: si $x \to -\left(\sqrt{3}\right)^-$ o si $x \to \left(\sqrt{3}\right)^+$ la función tiende hacia $-\infty \Rightarrow$ la curva tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -\sqrt{3}$ y $x = +\sqrt{3}$.



Las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas

Recuerda que dos funciones *f* y *g* son inversas cuando se cumple que: $g(f(x)) = x$ y $f(g(x)) = x$.
La función inversa de *f* se designa por f^{-1}. (También se dice que *f* y *g* son recíprocas.)

En nuestro caso, como $f(x) = \log_a x \Leftrightarrow x = a^{f(x)}$, se deduce que las funciones exponencial y logarítmica son inversas; esto es, si se aplican sucesivamente el logaritmo y la exponencial en la misma base, se vuelve al punto de partida. O sea: $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$.
Así, por ejemplo:
$\log 10^{3,5} = 3,5$ y $10^{\log 3,5} = 3,5$;
Puedes comprobarlo escribiendo en tu calculadora:
$\log 10 \wedge 3.5 = 3.5$; al revés, $10 \wedge \log 3.5 =$ 3.5
También puede verse que:
$\ln e^2 = 2$ y $e^{\ln 2} = 2$.



- En las calculadoras los pares de teclas $\boxed{\log x}$, $\boxed{10^x}$ y $\boxed{\ln x}$, $\boxed{e^x}$ aparecen una encima de la otra.
- Sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Antilogaritmo
Es la inversa del logaritmo (la exponencial correspondiente). Esto es: antilog $b = 10^b \to$ el antilogaritmo de *b* es el número cuyo logaritmo vale *b*.

Ejemplos:
a) antilog 2 = 100, pues log 100 = 2; antilog (–1) = 10^{-1} = 0,1, pues log 0,1 = –1.

b) antiln 3 = e^3, pues ln e^3 = 3; antiln (–2) = e^{-2}, pues ln e^{-2} = –2.

- En las calculadoras, el antilogaritmo se halla pulsando sucesivamente las teclas SHIFT log (o ln).

c) antilog 1,2 = 15,8489 $\to$ (SHIFT log 1,2 = 15,8489); antilog (–1) $\to$ SHIFT log (–1) = 0,1.

d) antiln 1/2 $\to$ SHIFT ln 1/2 = 1,6487 (queda más ´elegante` si se escribe antiln 1/2 = $e^{1/2} = \sqrt{e}$).

3. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En estas ecuaciones la incógnita está en el exponente de una potencia o va ligada a un logaritmo.
Se resuelven aplicando las propiedades de las potencias y de los logaritmos.
En algún momento del proceso suele aplicarse alguna de las propiedades:
1) $A^{f(x)} = A^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
2) $\log_a(f(x)) = \log_a(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
3) Y, por supuesto, la definición de logaritmo: $\log_a(f(x)) = b \Rightarrow f(x) = a^b$.

Ejemplos:
a) Si $5^{x^2-2} = 5^x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 2$.
b) $\log(2x-5) = \log 3 \Rightarrow 2x - 5 = 3 \Rightarrow x = 4$.
c) $\ln(2x) = 3 \Rightarrow 2x = e^3 \Rightarrow x = e^3/2$.

Ecuaciones exponenciales inmediatas (no hay sumas de expresiones exponenciales)

La más sencilla es: $\underline{a^x = b}$, $a > 0$ y $b > 0$. Se resuelve aplicando logaritmos.

→ El caso $\underline{c + ka^{f(x)} = b}$ es análogo. Se resuelve despejando: $c + ka^{f(x)} = b \Rightarrow a^{f(x)} = \dfrac{b-c}{k} \Rightarrow \ldots$

En todos los casos hay que manejar correctamente las transformaciones algebraicas usuales.

Ejemplos:

a) $2^x = 15 \Rightarrow \log 2^x = \log 15 \Rightarrow x\log 2 = \log 15 \Rightarrow x = \dfrac{\log 15}{\log 2} = \dfrac{1{,}176...}{0{,}301...} = 3{,}90689...$

b) $3 \cdot 2^{4x} + 15 = 63 \to$ (se trasponen términos y se despeja) $\to$

$3 \cdot 2^{4x} = 63 - 15 \Rightarrow 3 \cdot 2^{4x} = 48 \Rightarrow 2^{4x} = \dfrac{48}{3} \Rightarrow 2^{4x} = 16 \Rightarrow 2^{4x} = 2^4 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$.

c) $\dfrac{1}{3^x} = 30 \Rightarrow 3^{-x} = 30 \Rightarrow \log 3^{-x} = \log 30 \Rightarrow -x\log 3 = \log 30 \Rightarrow x = -\dfrac{\log 30}{\log 3} = -3{,}0959...$

d) $3 \cdot 5^{x^2+2} = 375 \Rightarrow 5^{x^2+2} = \dfrac{375}{3} \Rightarrow 5^{x^2+2} = 125 \Rightarrow 5^{x^2+2} = 5^3 \Rightarrow x^2 + 2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Observaciones: No son ecuaciones exponenciales, pero tienen ciertas relaciones con ellas:

1. La ecuación $\underline{a^b = x}$, con $a > 0$, es un ejercicio común de potenciación. Puede resolverse con la calculadora. Así, por ejemplo, $4^{3,2} = x \to$ con la calculadora se obtiene $x = 84{,}4885$.

2. La ecuación $\underline{x^a = b}$, con $b > 0$, es un ejercicio de radicación, pues $x^a = b \Rightarrow x = b^{\frac{1}{a}}$. Así, por ejemplo: $x^{3,2} = 15 \Rightarrow x = 15^{1/(3,2)} \approx 2{,}3309 \to$ puedes pulsar: 15^(1/3.2) = 2,330926173.

Ecuaciones logarítmicas inmediatas (no hay sumas de expresiones logarítmicas)

La más sencilla es $\underline{\log_a x = b}$. Se resuelven aplicando la definición: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

Si las bases son 10 o e se resuelven directamente con la calculadora, aplicando antilogaritmos.

→ El caso $\underline{c + k\log f(x) = b}$ es análogo. Se resuelve despejando:

$c + k\log f(x) = b \Rightarrow \log f(x) = \dfrac{b-c}{k} \Rightarrow f(x) = \text{antilog}\dfrac{b-c}{k} \Rightarrow \ldots$

En todos los casos hay que manejar correctamente las transformaciones algebraicas usuales.

Ejemplos:

a) $\log_3 x = 0{,}4 \Rightarrow x = 3^{0,4} = 1{,}5518\ldots$

b) $\log x = 2{,}5 \Rightarrow x = \text{antilog } 2{,}5 \approx 316{,}2278$; $\ln x = 0{,}1 \Rightarrow x = \text{antiln } 0{,}1 \approx 1{,}052$.

c) $1 + \log 2x = 5 \Rightarrow \log 2x = 4 \Rightarrow 2x = \text{anti}\log 4 = 10000 \Rightarrow x = 5000$.

d) $\ln(x+3)^2 = -2 \Leftrightarrow 2\ln(x+3) = -2 \Leftrightarrow \ln(x+3) = -1 \Rightarrow x + 3 = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1} - 3$.

Observaciones: No son ecuaciones logarítmicas, pero tienen ciertas relaciones con ellas:

1. La ecuación $\underline{\log_a b = x}$. Puede resolverse aplicando la definición: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$. Así, por ejemplo: $\log_4 50 = x \Rightarrow 4^x = 50 \Rightarrow \log 4^x = \log 50 \Rightarrow x\log 4 = \log 50 \Rightarrow x = \dfrac{\log 50}{\log 4} = 2{,}8219$.

2. La ecuación $\underline{\log_x a = b}$. Se resuelve aplicando la definición de logaritmo. Así, por ejemplo:

$\log_x 1000 = 5 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = 1000^{1/5} = 3{,}98107$.

Ecuaciones exponenciales con sumas y restas
De estas ecuaciones sólo pueden resolverse las "preparadas": aquellas en las que intervengan exponenciales con la misma base o reducibles a ellas. Por ejemplo las ecuaciones:

$4^x - 5\cdot 2^x - 24 = 0$; $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224$; $2\cdot 3^x - 5\cdot 3^{x-1} = 3$.

Para resolverlas, además de las operaciones básicas, es imprescindible conocer y manejar con destreza las propiedades de la potenciación y de los logaritmos. No hay métodos generales, pero alguna vez, suele dar resultado el cambio de variable $a^x = t$; en otras ocasiones deberá sacarse factor común…

Ejemplos:
a) Para resolver $4^x - 5\cdot 2^x - 24 = 0$ se hace el cambio $2^x = t$, con lo cual:

$$4^x - 5\cdot 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left(2^2\right)^x - 5\cdot 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 5\cdot 2^x - 24 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t - 24 = 0.$$

La última ecuación, que es de segundo grado, tiene por soluciones $t = 8$ y $t = -3$.
Para $t = 8$, se tiene $2^x = t = 8 \Rightarrow x = 3$.
Para $t = -3 \Rightarrow 2^x = t = -3$, que es imposible. En consecuencia, la solución es $x = 3$.

b) Para resolver $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224$ debe tenerse en cuenta la propiedad $a^n\cdot a^m = a^{n+m}$, para después sacar factor común:

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 224 \Rightarrow 2^x + 2^x\cdot 2 + 2^x\cdot 2^2 = 224 \Rightarrow 2^x\cdot(1+2+4) = 224 \Rightarrow 2^x\cdot 7 = 224 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^x = \frac{224}{7} \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow x = 5.$$

c) La ecuación $2\cdot 3^x - 5\cdot 3^{x-1} = 3 \Leftrightarrow 2\cdot 3^x - 5\cdot 3^x\cdot 3^{-1} = 3 \Leftrightarrow 2\cdot 3^x - 5\cdot\frac{3^x}{3} = 3$ (se quitan denominadores)* $\Leftrightarrow 6\cdot 3^x - 5\cdot 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

* Un posible <u>error</u> sería escribir: $3\cdot\left(2\cdot 3^x - \frac{5}{3}3^x\right) = 3\cdot 3 \Rightarrow 3\cdot 2\cdot 3\cdot 3^x - 5\cdot 3^x = 9 \Rightarrow 18\cdot 3^x - 5\cdot 3^x = 9...$

Ecuaciones logarítmicas son sumas o restas
Para resolverlas hay que transformarlas, aplicando las propiedades de los logaritmos, en alguna de las ya estudiadas.

Ejemplos:
a) $\log(x+5) - 2\log(x-4) = 1 \to$ (propiedad de la potencia) $\log(x+5) - \log(x-4)^2 = 1 \to$ $\to$ (propiedad de la resta) $\log\frac{x+5}{(x-4)^2} = 1 \to$ (por definición) $\frac{x+5}{(x-4)^2} = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x+5 = 10(x-4)^2 \Rightarrow x+5 = 10(x^2 - 8x + 16) \Rightarrow 10x^2 - 81x + 155 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ y } x = 3{,}1.$$

(El valor $x = 3{,}1$ no vale como solución: al sustituir $x = 3{,}1$ en $\log(x-4)$ no tiene sentido).

b) $\log(3x-1) + \log x = 1 \to$ (propiedad de la suma) $\log((3x-1)\cdot x) = 1 \to$ (por definición)

$$(3x-1)\cdot x = 10 \Rightarrow 3x^2 - x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -5/3.$$

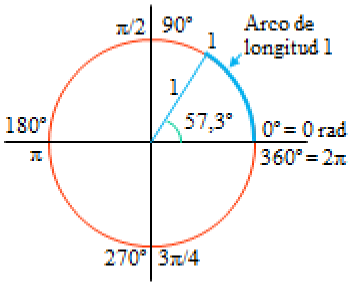
(La solución $x = -5/3$ no es válida: al sustituir la $x = -5/3$ en la ecuación inicial resulta log $(-5/3)$, que no está definido).

c) $\log(x+4) + \log(x-1) = \log(x^2+5) \to$ (propiedad de la suma) $\log[(x+4)\cdot(x-1)] = \log(x^2+5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+4)\cdot(x-1) = x^2 + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 5 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3.$$

4. Funciones trigonométricas

La trigonometría se utiliza en la vida cotidiana para solucionar problemas en triángulos: medidas de sus lados o de sus ángulos. Para ello se aplican las razones (funciones) trigonométricas seno, coseno y tangente.

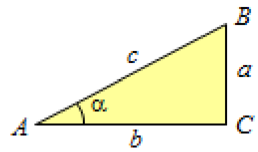


- Los ángulos se miden en grados y en radianes.
- El grado es una medida sexagesimal: un ángulo completo mide 360º. Un ángulo recto mide 90º y un llano, 180º.
- El radian es una medida longitudinal, numérica real: un radian es un ángulo que abarca un arco de longitud igual al radio con el que ha sido trazado. En una circunferencia de radio 1, una vuelta completa son 2π radianes; un cuarto de vuelta son π/2 radianes; y media vuelta, π radianes.
- La relación entre ambas unidades es 360º = 2π radianes ≈ 6,28 radianes; 1 radian ≈ 57,3º.

(Recuerda que la longitud de una circunferencia es 2π*r*: 2π radios; 2π radianes).

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

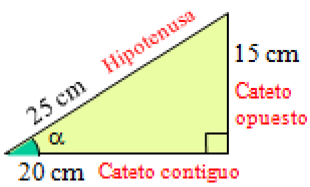
Dado un ángulo cualquiera, α, que se sitúa en un triángulo rectángulo como el de la figura, se definen las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de α, como siguen:



$$\text{sen}\,\alpha = \sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}; \quad \text{tag}\,\alpha = \tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}.$$

Observaciones y aclaraciones:

1) El seno relaciona la medida de la altura (del cateto opuesto al ángulo) con la de la hipotenusa; el coseno, la medida de la base (del cateto contiguo al ángulo) con la hipotenusa.



En el triángulo adjunto: $\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{25} = 0,6$; $\cos\alpha = \frac{20}{25} = 0,8$.

2) La tangente relaciona la altura con la base (desplazamiento vertical respecto al horizontal). La tangente mide la pendiente del ángulo, la inclinación de la hipotenusa.

Que $\text{tag}\,\alpha = \frac{15}{20} = 0,75$ significa que un desplazamiento unitario hacia la derecha (de 1 cm, de 1 m,…) acarrea una elevación de 0,75 (cm, m,…).

3) Las razones trigonométricas no dependen de las medidas de los lados del triángulo: sólo dependen del valor del ángulo. Esto permite tabular los valores de estas razones. En las calculadoras pueden obtenerse con las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, en los modos DEG y RAD, para grados y radianes, respectivamente.

Así, por ejemplo:

En grados (Mode DEG): sin 30º = 0,5; cos 40º = 0,766…; cos 120º = –0,5; tan 88º = 28,636...

En radianes (Mode RAD): sin π = 0; sin 1,2 = 0,932…; cos 2,3 = –0,666…; tan 2,5 = –0,727…

4) Pueden considerase ángulos de más de una vuelta, mayores de 360º. Por ejemplo 540º, que equivale a dar vuelta y media. En la circunferencia, ese ángulo se representa como 180º.

También se pueden tomar ángulos negativos. Por ejemplo –30º, cuya abertura es de 30º, se mide en sentido negativo (siguiendo el movimiento de las agujas de un reloj) y se representa igual que el ángulo de 330º.

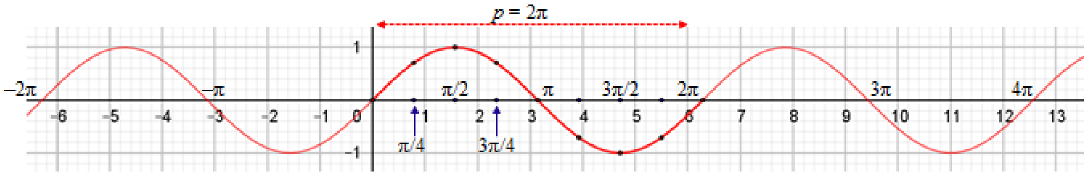
Los radianes se representan en la recta real. Así, π radianes es, aproximadamente, el número 3,14; y cuando se recorren 540º sobre la circunferencia en la recta se está en el número 3π ≈ 9,42.

La función seno

Su expresión más sencilla es $f(x) = \text{sen}\, x \to f(x) = \sin x$.

Características fundamentales:

- Su dominio de definición es **R**. Por tanto, x es un número real, la medida del ángulo en radianes.
- Los valores que toma el seno varían entre –1 y 1: su recorrido es el intervalo [–1, 1].
- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ para cualquier valor de x.
- Es una función simétrica respecto del origen. Esto es, $f(-x) = \text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x = -f(x)$.
- Su gráfica es la siguiente:

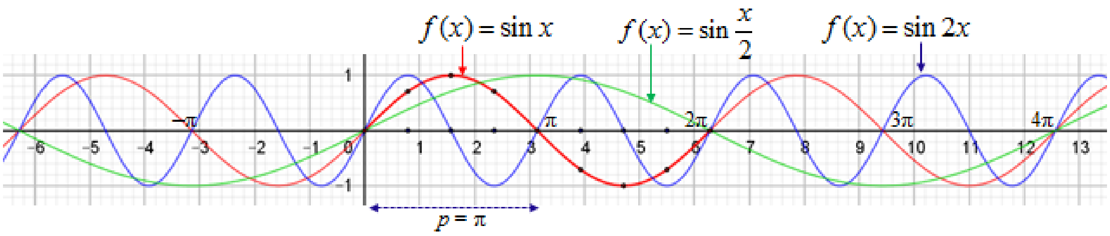


Nota: Las calculadoras trabajan esta función en el "modo" radianes: MODE RAD.

Otras funciones relacionadas con la función seno: La función $f(x) = \text{sen}(kx)$ contrae o dilata la función sen x. Si $k > 1$, se contrae; si $k < 1$, se dilata.

Ejemplo:

Para $k = 2$ y $k = 1/2$, se tendrían las funciones $f(x) = \sin 2x$ y $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ las gráficas son las siguientes.

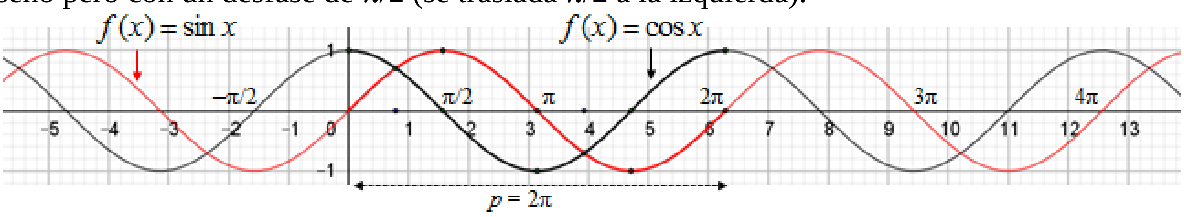


El periodo de $f(x) = \sin 2x$ es $p = \pi$; el de $f(x) = \text{sen}\frac{1}{2}x$ es $p = 4\pi$. (Véase el problema 16).

Advertencia: $f(x) = \sin 2x$ es $f(x) = \sin(2x)$, la x se multiplica por 2. En cambio, si se escribe $f(x) = 2\sin x$ significa $f(x) = 2(\sin x)$: el valor de (sin x) se multiplica por 2.

La función coseno

Puede definir a partir del seno así: $f(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, su gráfica será idéntica a la del seno pero con un desfase de $\pi/2$ (se traslada $\pi/2$ a la izquierda).

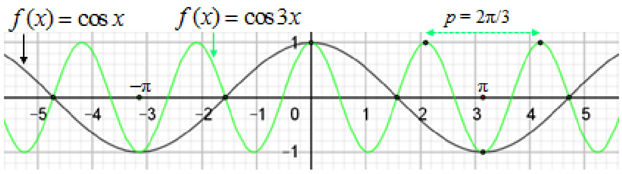


Características fundamentales:

- Su dominio de definición es **R**. Por tanto, como en la función seno, x es un número real
- Los valores que toma el coseno varían entre –1 y 1: su recorrido es el intervalo [–1, 1].
- Es periódica de periodo $p = 2\pi$. Esto es: $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ para cualquier valor de x.
- Es una función simétrica respecto del eje OY. Esto es, $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

Otras funciones relacionadas con la función coseno: La función $f(x)=\cos(kx)$ contrae o dilata la función cos x. Si $k > 1$, se contrae; si $k < 1$, se dilata.

Ejemplo:
Para $k = 3$, la función $f(x)=\cos(3x)$ es la que se representa en la figura adjunta. Va 3 veces más rápida que $f(x)=\cos x$. Su periodo es $p=\dfrac{2\pi}{3}$.

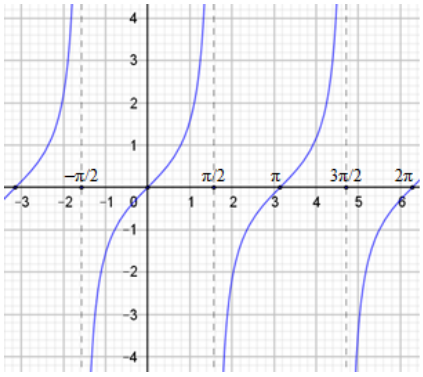


La función tangente

La función $f(x)=\text{tag } x=\tan x$ se define como: $f(x)=\text{tag } x=\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$.

Características fundamentales:

- Su dominio de definición es $\mathbf{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$, pues para $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ se anula el denominador: $\cos\left(\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$.
- Toma valores que varían entre $-\infty$ y $+\infty$: su recorrido es todo **R**.
- Es periódica de periodo $p = \pi$. Esto es: $\text{tag } x=\text{tag}(x+\pi)$ para cualquier valor de su dominio.
- Tiene por asíntotas verticales las rectas $x=\pm\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

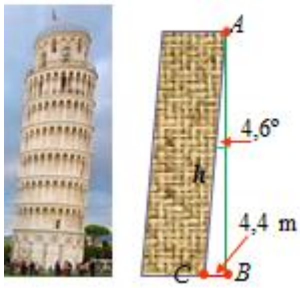


Una aplicación de la trigonometría

Las razones trigonométricas permiten obtener medidas desconocidas cuando se construye un triángulo rectángulo.

Ejemplos:
a) La inclinación de la torre de Pisa es de 4,6º respecto de la vertical. Sabiendo que una pelota dejada caer desde lo más alto de la torre impacta a 4,4 m de la base, ¿cuál es la altura aproxima de la torre?
→ Aplicando la razón seno en el triángulo *ABC*:

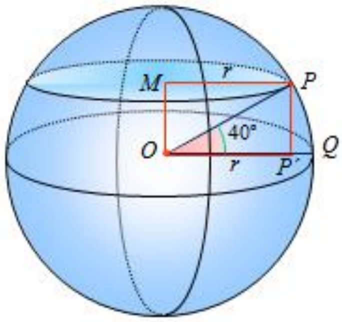
$$\sin 4,6^{\circ}=\frac{4,4}{h}\Rightarrow 0,0802=\frac{4,4}{h}\Rightarrow h=\frac{4,4}{0,0802}=54,86 \text{ m.}$$



b) La latitud de un paralelo terráqueo viene determinada por la amplitud del ángulo *POQ*, siendo *P* un punto del paralelo en cuestión, *Q* un punto del ecuador, ambos en el mismo meridiano, y *O* de centro de la Tierra. Calcula el radio, *r*, del paralelo 40; ¿cuánto mide ese paralelo? (Dato: el radio de la superficie terrestre es de 6370 km).
→ Aplicando la razón coseno en el triángulo *OPP´*:

$$\cos 40^{\circ}=\frac{OP'}{OP}\Rightarrow 0,766=\frac{r}{6370}\Rightarrow r=0,766\cdot 6370=4879,42 \text{ km.}$$

→ La longitud de paralelo será:
$L_{40^{\circ}}=2\pi r=2\cdot 3,14\cdot 4879,42=30642,76$ km.



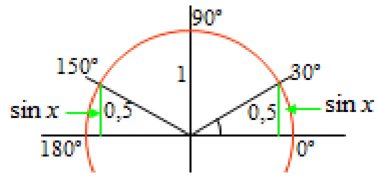
Nota: En el paralelo 40º N se encuentran ciudades como Madrid, Pekín o Nueva York.

5. Ecuaciones trigonométricas (sencillas)

En estas ecuaciones la incógnita aparece ligada a alguna razón trigonométrica.
En los casos sencillos, que son los que plantearán aquí, se resuelven aplicando las razones trigonométricas inversas.
Estas razones permiten hallar un ángulo del que se conoce su seno, su coseno o su tangente. Esto es, determinan un ángulo cuyo seno, coseno o tangente es igual a un número dado.
→ En las calculadoras aparecen encima de las teclas $\boxed{\sin}$, $\boxed{\cos}$ y $\boxed{\tan}$, como **sin^{-1}**, **cos^{-1}** y **tan^{-1}**.
La forma clásica de referirse a ellas es “arco seno” (arcsen o arcsin), “arco coseno” (arccos) y “arco tangente” (arctag o arctan). Se definen como sigue:

Arco seno ($\sin^{-1}$)
Para un número y comprendido entre –1 y 1: $\arcsin y = \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = y$.
(Salvo en los casos $y = \pm 1$, $\arcsin y$ siempre tiene dos soluciones, que son α y 180º – α).
→ Trabajaremos en grados por ser más intuitivo (Mode DEG). Si la solución se pidiese en radianes se hará la conversión: 180º = π radianes.

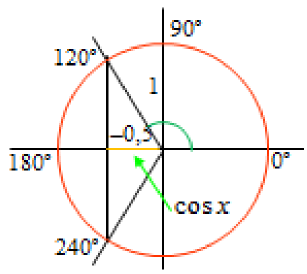
Ejemplos:
a) arcsin 0,5 = 30º, ya que sin 30º = 0,5 → el valor de arcsin 0,5 se halla con la calculadora pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sin}$ 0.5 $\boxed{=}$ → se obtiene 30º; la otra solución es 180 – 30 = 150º: sin 150º = 0,5.
Así pues, hay dos ángulos, en el primer giro, cuyo seno vale 0,5. Y por ser periódica, dos ángulos más en los sucesivos giros (cada 360º más, tanto en sentido positivo como negativo).
Por tanto, los ángulos α cuyo seno es 0,5, que es lo que significa arcsin 0,5 = α, son: $\alpha = \begin{cases} 30^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 150^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$, $k \in \mathbf{Z}$.



b) arcsin 0 = 0º, 180º, 360º… → arcsin 05 = α, son: $\alpha = k\cdot 180^\circ$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Arco coseno ($\cos^{-1}$)
Para un número y comprendido entre –1 y 1: $\arccos y = \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = y$.
(Salvo en los casos $y = \pm 1$, $\arccos y$ siempre tiene dos soluciones, que son α y 360 – α).

Ejemplo:
arccos (–0,5) = 120º, ya que cos 120º = –0,5 → el valor de arccos (–0,5) se halla con la calculadora: tecla $\cos^{-1}$ (que suele activarse pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ –0.5 $\boxed{=}$ → se obtiene 120º; la otra solución es 360 – 120 = 240º.
Así pues, hay dos ángulos, en el primer giro, cuyo coseno vale –0,5. Y por ser periódica, dos ángulos más en los sucesivos giros (± 360º).
Por tanto, los ángulos α cuyo coseno vale –05, son $\alpha = \begin{cases} 120^\circ + k\cdot 360^\circ \\ 240^\circ + k\cdot 360^\circ \end{cases}$.



Arco tangente ($\tan^{-1}$)
Para un número y comprendido entre –∞ y +∞: $\arctan y = \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = y$.

Ejemplo:
arctan 1,5 = 56,31º ya que tan 56,31º = 1,5 → el valor de arctan 1,5 se halla con la calculadora: tecla $\tan^{-1}$ (que suele activarse pulsando $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ 1.5 $\boxed{=}$ → se obtiene 56,31º, la otra solución es 236,31º = 56,31º + 180º, pues igualmente, tan 236,31º = 1,5.
(Hay dos soluciones en cada giro. Recuerda que tan x es periódica de periodo π = 180º).

Ecuaciones trigonométricas

La incógnita aparece ligada a una razón trigonométrica.

- Ecuaciones con seno:

La más elemental es $\sin x = c$, con c comprendido entre –1 y 1. Su solución es $x = \arcsin c$.

→ La ecuación $a \cdot \sin(bx) = c$ se resuelve despejando como sigue:

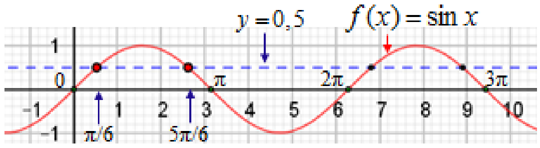
$$a \cdot \sin(bx) = c \Rightarrow \sin(bx) = \frac{c}{a} \Rightarrow bx = \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{b} \cdot \arcsin\left(\frac{c}{a}\right).$$

Salvo que aparezca $x = \arcsin(\pm 1)$ tienen dos soluciones en cada ciclo.

Ejemplos:

a) $\sin x = 0,5 \Rightarrow x = \arcsin 0,5 = \begin{cases} 30 + k \cdot 360 \\ 150 + k \cdot 360 \end{cases} \rightarrow$ en radianes, $x = \begin{cases} \pi/6 + 2k\pi \\ 5\pi/6 + 2k\pi \end{cases}$.

Esas soluciones son las abscisas de los puntos de corte de la recta $y = 0,5$ con la curva $f(x) = \sin x$.



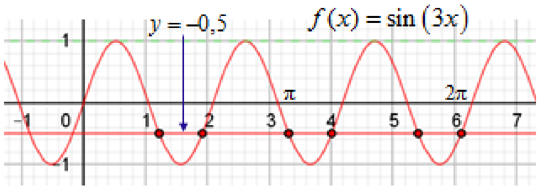
b) $\sin x = 0 \Rightarrow x = \arcsin 0 = k \cdot 180^o \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Estas soluciones son los cortes de $f(x) = \sin x$ con el eje de abscisas.

c) $2\sin(3x) = -1 \Rightarrow \sin(3x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3x = \arcsin(-0,5) \Rightarrow 3x = \begin{cases} -30^o + 360^o \cdot k \\ -150^o + 360 \cdot k \end{cases} \Rightarrow$

$$3x = \begin{cases} 330^o + 360^o \cdot k \\ 210^o + 360 \cdot k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 110^o + 120^o \cdot k \\ 70^o + 120^o \cdot k \end{cases}.$$

Hay seis soluciones en cada ciclo; son los puntos de corte de $f(x) = \sin(3x)$ con la recta $y = -0,5$ (los marcados en la figura adjunta, en radianes).



Nota: Sería un grave error escribir: $\sin(3x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{6}$ …; $\sin(3x)$ es "inseparable".

- Ecuaciones con coseno:

La más elemental es $\cos x = c$, con c comprendido entre –1 y 1. Su solución es $x = \arccos c$.

→ La ecuación $a \cdot \cos(bx) = c$ se resuelve despejando como sigue:

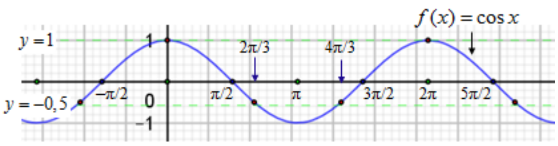
$$a \cdot \cos(bx) = c \Rightarrow \cos(bx) = \frac{c}{a} \Rightarrow bx = \arccos\left(\frac{c}{a}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{b} \cdot \arccos\left(\frac{c}{a}\right).$$

Salvo que aparezca $x = \arccos(\pm 1)$ tienen dos soluciones en cada ciclo.

Ejemplos:

a) $\cos x = -0,5 \Rightarrow \arccos(-0,5) = x \Leftrightarrow x = \begin{cases} 120^o + k \cdot 360^o \\ 240^o + k \cdot 360^o \end{cases}$; en radianes: $x = \begin{cases} 2\pi/3 + 2k\pi \\ 4\pi/3 + 2k\pi \end{cases}$.

Esas soluciones son las abscisas de los puntos de corte de la recta $y = -0,5$ con la curva $f(x) = \cos x$.



b) $\cos x = 1 \Rightarrow x = \arccos 1 = k \cdot 360^o \rightarrow x = 2k \cdot \pi$.

(Son los puntos más altos de la función cos x).

c) $\sqrt{2}\cos x = 1 \Rightarrow x = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \begin{cases} 45^o + 360^o \cdot k \\ 315^o + 360 \cdot k \end{cases}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente, dando valores a x para hallar algunos de sus puntos, las funciones:

a) $f(x)=1,4^x$; b) $f(x)=0,6^x$; c) $f(x)=-\left(1,4^x\right)$; d) $f(x)=e^{x-1}$.

Represéntalas también utilizando Google (o cualquier programa informático disponible).

2. A partir de la gráfica de $f(x)=e^x$ representa las funciones:

a) $f_1(x)=-e^x$; b) $f_2(x)=\dfrac{e^x}{2}$; c) $f_3(x)=2+e^x$; d) $f_4(x)=e^{x/2}$.

Comprueba tus resultados utilizando algún programa informático.

3. Determina el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=2^{5-x}$; b) $f(x)=e^{\frac{1}{x+2}}$; c) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}$; d) $f(x)=3^{\frac{x}{x-1}}$.

4. Halla el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x)=\log(6-2x)$; b) $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$; c) $f(x)=x\ln x$; d) $f(x)=\log(x-1)^2$.

5. Representa gráficamente, dando valores, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<0\\ 2^x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}2^{x-2}, & \text{si } x\leq 2\\ x-2, & \text{si } x>2\end{cases}$.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x-1}=243$; b) $2^x=5$; c) $\dfrac{3^{2x}}{9}=729$; d) $3\cdot 5^{2x}=225$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x+2^{x+1}+2^{x+3}=88$; b) $3^x-7\cdot 3^{x-2}=18$; c) $9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$;
d) $4\cdot 5^x-12\cdot 5^{x-1}=200$; e) $3^x-2\cdot 3^{x-1}=9$; f) $2^{x+1}-12\cdot 2^{1-x}=13$.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x+5)^2=2$; b) $\log_3 x=5$; c) $\ln\left(x^2-1\right)=0$; d) $\log_x 4=-1$.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log(x-3)=1$; b) $\log(x+1)+\log x=\log 20$;

c) $\log(2x+2)-\log(x-3)=1$; d) $\log(x+6)-2\cdot\log(x-3)=1$.

10. La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2 %. Si actualmente tiene 750000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener 1 millón?

11. Un equipo de fútbol de categoría regional comenzó con 100 socios. Desde su fundación el número de socios creció de manera uniforme (con crecimiento porcentual igual año a año). Si al cabo de 9 años el número de socios era de 3844, ¿a qué porcentaje creció anualmente?

12. Supongamos que la cantidad de madera de un bosque aumenta un 6 % anualmente. Si en el año 2020 había una cantidad de madera equivalente a 1000 toneladas:
a) Escribe la expresión de la función que proporciona la cantidad de madera que habrá al cabo de x años (desde el año 2020). ¿Qué cantidad de madera habrá en 2030?
b) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad de madera sea doble que la del año 2020?
c) Haz la gráfica que representa la cantidad de madera a lo largo del tiempo. (En eje *OY* puede tomarse 1 = 1000 t; en el eje *OX*, $x = 0$ indica el año 2020).

13. La función que da el valor de un automóvil a partir del momento de su adquisición es $P(t) = 25000 \cdot 1,2^{-t}$, t en años y P en euros.
a) ¿Cuánto costó nuevo?
b) ¿Cuánto valdrá a los 2 años de su adquisición?
c) Representa gráficamente la función $P(t)$ en el intervalo [0, 10]. (En el eje vertical puedes adaptar la escala de manera que 1 = 5000 €).

14. Supongamos que la función que da la cantidad (en porcentaje) de un determinado fármaco presente en sangre (en mg), respecto al tiempo (en horas), desde el momento en que este es inyectado, viene dada por $C(t) = 100 \cdot \left(0,85^t\right)$.
a) ¿Qué porcentaje queda al cabo de 4 horas?
b) ¿Si se supone que cuando queda en sangre menos de un 2 % de la dosis inicial el fármaco deja de hacer efecto, ¿en qué momento dejará de hacer efecto el fármaco inyectado?

15. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = 2 + 0,5e^{0,4x}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y x el tiempo en días desde el momento presente. ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en duplicarse la población inicial?

16. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, representa las funciones:
a) $f_1(x) = 2(\sin x)$; b) $f_2(x) = \sin(2x)$; c) $f_3(x) = \frac{\sin x}{2}$; d) $f_4(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

17. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, representa la función $f(x) = 2 - \sin x$.

18. A partir de la gráfica de $f(x) = \cos x$ dibuja, en el mismo intervalo [0, 4π], la gráfica de las funciones $g(x) = 1 + \cos x$ y la de $h(x) = \cos x - 2$.

19. Halla dos valores para α, en grados, sabiendo que:
a) sin α = 0,6; b) cos α = 0,5; c) tan α = –2; d) sin α = 0;
e) sin α = –0,7; f) cos α = –0,7; g) tan α = 1; h) cos α = 0.

20. Halla dos valores de α, en radianes, sabiendo que:
a) sin α = 0,3; b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; c) tan α = 2; d) cos α = −1.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\sin 2x = 0,5$; c) $\sin\frac{x}{2} = -0,5$; d) $\sin 3x = -1$.

22. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $2\cos x = \sqrt{2}$; c) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$; d) $\cos 4x = 0{,}5$.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\tan x = -1$; b) $2\tan x = 3$; c) $\tan(2x) = -\sqrt{3}$; d) $2\tan\dfrac{x}{4} = 0$.