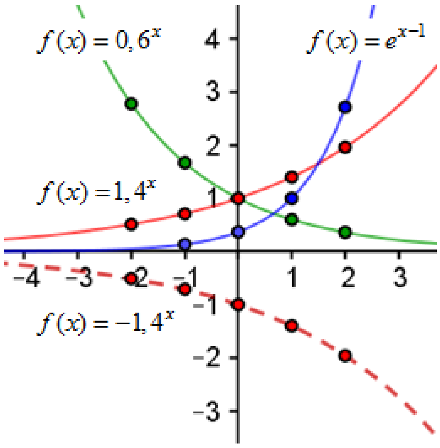
SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente, dando valores a *x* para hallar algunos de sus puntos, las funciones:

a) $f(x) = 1,4^x$; b) $f(x) = 0,6^x$; c) $f(x) = -\left(1,4^x\right)$; d) $f(x) = e^{x-1}$.

Represéntalas también utilizando Google (o cualquier programa informático disponible).

Solución:



a) $f(x) = 1,4^x$.

Puntos: (0, 1); (1, 1,4); (2, 1,96); (–1, 0,71); (–2, 0,51).

b) $f(x) = 0,6^x$.

Puntos: (0, 1); (1, 0,6); (2, 0,36); (–1, 1,67); (–2, 2,78).

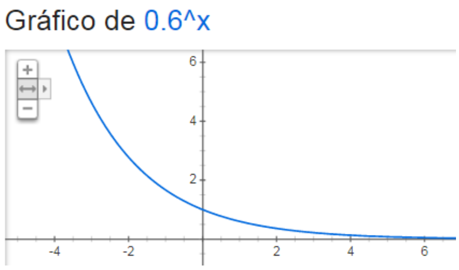
c) $f(x) = -\left(1,4^x\right)$.

Puntos: (0, –1); (1, –1,4); (2, –1,96); (–1, –0,71); (–2, –0,51).

Compárala con $f(x) = 1,4^x$. (Verás que es la opuesta).

d) $f(x) = e^{x-1}$.

Puntos: (0, 0,37); (1, 1); (2, *e*) = (2, 2,71); (–1, 0,14); (–2, 0,05).



Nota. Además de Google, que aquí se indica por ser el más accesible, existen muchos programas informáticos que permiten dibujar. También son fáciles de utilizar algunas aplicaciones para móviles, por ejemplo, **Mathway** o **Photomath**. (Aquí se utiliza habitualmente el programa **GeoGebra**).

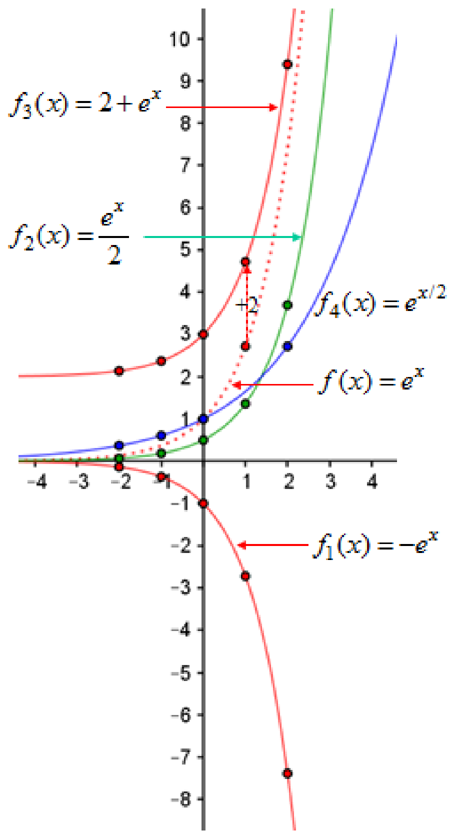
2. A partir de la gráfica de $f(x) = e^x$ representa las funciones:

a) $f_1(x) = -e^x$; b) $f_2(x) = \dfrac{e^x}{2}$;

c) $f_3(x) = 2 + e^x$; d) $f_4(x) = e^{x/2}$.

Comprueba tus resultados utilizando algún programa informático.

Solución:



Todas pueden representarse a partir de la función $f(x) = e^x$, que pasa por los puntos:

(0, 1), (1, *e*) ≡ (1, 2,72); (2, e^2) ≡ (2, 7,39);
(–1, 1/*e*) ≡ (1, 0,37); (–2, 1/e^2) ≡ (–2, 0,14).

a) $f_1(x) = -e^x$ se obtiene cambiando el signo de la segunda coordenada, de la *y*: es la función opuesta de $f(x) = e^x$.

Algunos puntos son: (0, –1), (1, –2,72); (2, –7,39); (–1, –0,37).

b) $f_2(x) = \dfrac{e^x}{2}$ se obtiene dividiendo por 2 la ordenada, la *y*.

(0, 1/2), (1, *e*/2); (2, e^2/2); /1, 0,37/2); (–2, 0,14/2).

c) $f_3(x) = 2 + e^x$ se obtiene sumando 2 a cada ordenada: la gráfica de $f(x) = e^x$ se desplaza 2 unidades hacia arriba.
Algunos puntos: (0, 3), (1, 4,72); (2, 9,39); (–1, 2,37).

d) $f_4(x) = e^{x/2}$ se obtiene dilatando la gráfica de $f(x) = e^x$ (a razón de 2 a 1): $f_4(2x) = f(x) = e^x$.
Algunos puntos son: (0, 1), (2, *e*) ≡ (2, 2,72); (–2, 1/*e*) ≡ (1, 0,37).

3. Determina el dominio de definición de las funciones:

a) $f(x) = 2^{5-x}$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}}$; c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$; d) $f(x) = 3^{\frac{x}{x-1}}$.

Solución:
Las funciones exponenciales están definidas siempre que lo esté el exponente.

a) Dom (*f*) = **R** → el exponente, 5 – *x* está definido siempre.

b) Dom (*f*) = **R** – {–2} → el exponente, $\dfrac{1}{x+2}$, no está definido cuando *x* = –2.

c) Dom (*f*) = **R** → el exponente, $\dfrac{1}{x^2+1}$, está definido siempre.

d) Dom (*f*) = **R** – {1} → el exponente, $\dfrac{x}{x-1}$, no está definido cuando *x* = 1.

4. Halla el dominio de definición de las funciones:
a) $f(x) = \log(6-2x)$; b) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$; c) $f(x) = x\ln x$; d) $f(x) = \log(x-1)^2$.

Solución:
Las funciones logarítmicas del tipo $f(x) = \log(E(x))$ están definidas solo para valores de *x* que hacen que $E(x) > 0$.

a) $f(x) = \log(6-2x)$ está definida cuando $6 - 2x > 0 \Rightarrow 6 > 2x \Rightarrow x < 3$. Dom(*f*) = (–∞, 3).

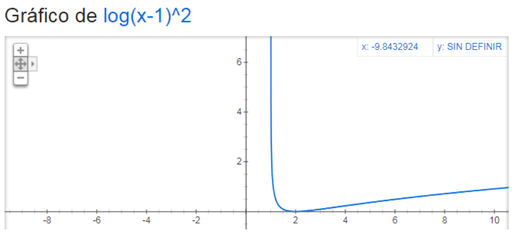
b) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ está definida para todo *x*, pues $x^2 + 1$ siempre es positivo. Dom(*f*) = **R**.

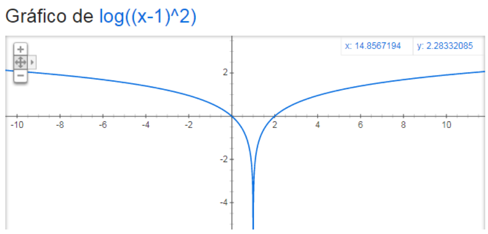
c) $f(x) = x\ln x$ está definida para todo *x* > 0. Dom(*f*) = $\mathbf{R}^+$.

d) $f(x) = \log(x-1)^2$ está definida para todo $x \neq 1$, pues $(x-1)^2 > 0$ si $x \neq 1$. Dom(*f*) = **R** – {1}.

Observación:
Al representar la función $f(x) = \log(x-1)^2$ puedes comprobar que el ordenador dibuja la función $f(x) = \left(\log(x-1)\right)^2$, restringiendo su dominio a *x* > 1. Para evitar la confusión debes teclear $f(x) = \log\left((x-1)^2\right)$ → log((x–1)^2).

Si se escribe $f(x) = 2\log(x-1)$, solo aparece la "rama" de la derecha; pues aplica la propiedad $\log A^n = n\log A$.



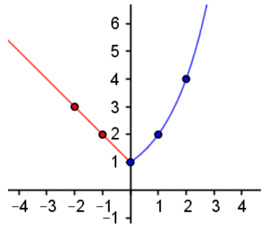


5. Representa gráficamente, dando valores, las siguientes funciones:

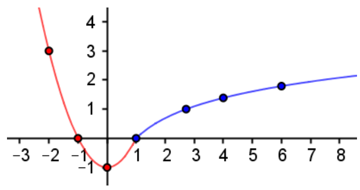
a) $f(x)=\begin{cases}-x+1, & \text{si } x<0\\ 2^x, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}2^{x-2}, & \text{si } x\leq 2\\ x-2, & \text{si } x>2\end{cases}$.

Solución:

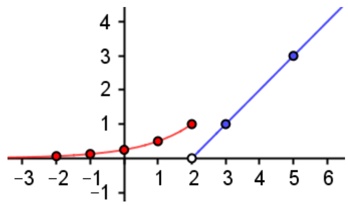
a) A la izquierda de $x = 0$ la función es una recta; para $x \geq 0$, es una exponencial.
Algunos puntos son:
$x < 0$: (–2, 3); (0, 1);
$x \geq 0$: (0, 1); (1, 2); (2, 4).



b) A la izquierda de $x = 1$ la función es una parábola; para $x \geq 1$, es un logaritmo.
Algunos puntos son:
$x < 1$: (–2, 3); (–1, 0); (0, –1); (1^-, 0)
$x \geq 1$: (1, 0); (e, 1) (4, 1,39); (6, 1,79).



c) Para $x \leq 2$ la función es una exponencial recta; para $x > 2$, es una recta.
Algunos puntos son:
$x \leq 2$: (–2, 1/16); (–1, 1/8); (0, 1/4); (1, 1/2); (2, 1);
$x > 2$: (2^+, 0); (3, 2); (5, 3).
Puede observarse que no es continua en $x = 2$.



6. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{2x-1}=243$; b) $2^x=5$; c) $\dfrac{3^{2x}}{9}=729$; d) $3{\cdot}5^{2x}=225$.

Solución:

a) Basta con descomponer 243 en factores primos: $243=3^5$.
$3^{2x-1}=243 \Rightarrow 3^{2x-1}=3^5 \Rightarrow 2x-1=5 \Rightarrow x=3$.

b) Hay que aplicar logaritmos.
$$2^x=5 \Rightarrow \log 2^x=\log 5 \Rightarrow x\log 2=\log 5 \Rightarrow x=\frac{\log 2}{\log 5}\approx 2,3219.$$

c) Operando y aplicando logaritmos:
$$\frac{3^{2x}}{9}=729 \Rightarrow 3^{2x}=9{\cdot}729 \Rightarrow 3^{2x}=6561 \Rightarrow \log\left(3^{2x}\right)=\log 6561 \Rightarrow \frac{x}{2}\log 3=\log 6561 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{\log 6561}{2{\cdot}\log 3} \Rightarrow x=4.$$
También podría verse que $3^{2x-2}=729=3^6 \Rightarrow 2x-2=6 \Rightarrow x=4$.

d) $3\cdot 5^{2x} = 225 \Rightarrow 5^{2x} = \dfrac{225}{3} \Rightarrow 5^{2x} = 75$. Aplicando logaritmos: $\log\left(5^{2x}\right) = \log 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\log 5 = \log 75 \Rightarrow x = \dfrac{\log 75}{2\log 5} = 1,3413...$

Observación: Un error fatal al resolver $3\cdot 5^{2x} = 225$ es deducir: $\underline{3\cdot 5}^{2x} = 225 \Rightarrow \underline{15}^{2x} = 225$.

7. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88$; b) $3^x - 7\cdot 3^{x-2} = 18$; c) $9^x - 4\cdot 3^{x+1} + 27 = 0$;

d) $4\cdot 5^x - 12\cdot 5^{x-1} = 200$; e) $3^x - 2\cdot 3^{x-1} = 9$; f) $2^{x+1} - 12\cdot 2^{1-x} = 13$.

Solución:

a) Aplicando la propiedad $a^{n+m} = a^n\cdot a^m$: $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+3} = 88 \Leftrightarrow 2^x + 2^x\cdot 2 + 2^x\cdot 2^3 = 88 \to$ (sacando factor común 2^x) $\Rightarrow 2^x\left(1+2+2^3\right) = 88 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

b) $3^x - 7\cdot 3^{x-2} = 18 \to$ (como $3^{x-2} = \dfrac{3^x}{3^2} = \dfrac{3^x}{9}$) $\to 3^x - 7\cdot\dfrac{3^x}{9} = 18 \to$ (factor común) $\to$

$\left(1 - \dfrac{7}{9}\right)3^x = 18 \Rightarrow \dfrac{2}{9}\cdot 3^x = 18 \to$ (se multiplica por 9 y divide por 2) $\to 3^x = 81 \Rightarrow x = 4$.

c) Aplicando la propiedad $9^x = \left(3^2\right)^x = 3^{2x} = \left(3^x\right)^2$ se tendrá:

$9^x - 4\cdot 3^{x+1} + 27 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 4\left(3\cdot 3^x\right) + 27 = 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - 12\cdot 3^x + 27 = 0 \to$ (haciendo $3^x = t$)

$\to t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{12 \pm \sqrt{144-108}}{2} = \dfrac{12 \pm 6}{2} = \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$.

Para $t = 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$; para $t = 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

d) $4\cdot 5^x - 12\cdot 5^{x-1} = 200 \Rightarrow 4\cdot 5^x - 12\cdot\dfrac{5^x}{5} = 200 \to$ (multiplicando por 5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 20\cdot 5^x - 12\cdot 5^x = 1000 \Rightarrow 8\cdot 5^x = 1000 \Rightarrow 5^x = 125 \Rightarrow x = 3$.

e) $3^x - 2\cdot 3^{x-1} = 9 \to$ (sacando factor común 3^{x-1}) $\to 3^{x-1}\cdot(3-2) = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 9 \Rightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$.

f) $2^{x+1} - 12\cdot 2^{1-x} = 13 \to$ (como $2^{x+1} = 2\cdot 2^x$ y $2^{1-x} = \dfrac{2}{2^x}$) $\to 2\cdot 2^x - 12\cdot\dfrac{2}{2^x} = 13 \Rightarrow$ (multiplicando por 2^x y trasponiendo términos) $\Rightarrow 2\left(2^x\right)^2 - 13\cdot 2^x - 24 = 0 \Rightarrow$ (resolviendo la ecuación de 2º grado) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = \dfrac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4\cdot 2\cdot(-24)}}{4} = \dfrac{13 \pm 19}{4} = \begin{cases} 8 \\ -3/2 \end{cases} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3;\ 2^x = -3/2$ no puede ser.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x+5)^2 = 2$; b) $\log_3 x = 5$; c) $\ln\left(x^2 - 1\right) = 0$; d) $\log_x 4 = -1$.

Solución:

a) Aplicando la propiedad $\log A^n = n\log A$ se tiene:

$\log(x+5)^2 = 2 \Rightarrow (x+5)^2 = 10^2 \Rightarrow x + 5 = \pm 10 \Rightarrow x = 5$; $x = -15$.

b) Por definición de logaritmo: $\log_3 x = 5 \Rightarrow x = 3^5 = 243$.

c) Por definición: $\ln\left(x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

d) Por definición: $\log_x 4 = -1 \Rightarrow 4 = x^{-1} \Rightarrow 4 = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

9. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2\log(x-3) = 1$;

b) $\log(x+1) + \log x = \log 20$;

c) $\log(2x+2) - \log(x-3) = 1$;

d) $\log(x+6) - 2\cdot\log(x-3) = 1$.

<u>Solución</u>:

a) Simplificando: $2\log(x-3) = 1 \Rightarrow \log(x-3) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 3 = 10^{1/2} \Rightarrow x = 3 + \sqrt{10}$.

(Si se aplica el antilogaritmo en $\log(x-3) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 3 = 3{,}16227766 \Rightarrow x = 6{,}16227766$).

b) Aplicando la propiedad $\log A + \log B = \log(A\cdot B)$ se tendrá:

$\log(x+1) + \log x = \log 20 \Leftrightarrow \log((x+1)\cdot x) = \log 20 \Rightarrow (x+1)\cdot x = 20 \Rightarrow x = 4$ o $x = -5$.

Solo vale la solución positiva, $x = 4$.

c) Aplicando la propiedad $\log A - \log B = \log\frac{A}{B}$ se tendrá:

$\log(2x+2) - \log(x-3) = 1 \Rightarrow \log\frac{2x+2}{x-3} = 1 \Rightarrow \frac{2x+2}{x-3} = 10 \Rightarrow x = 4$.

d) Aplicando las propiedades $n\log A = \log A^n$ y $\log A - \log B = \log\frac{A}{B}$ se tendrá:

$$\log(x+6) - 2\cdot\log(x-3) = 1 \Leftrightarrow \log(x+6) - \log(x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow \log\frac{x+6}{(x-3)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x+6}{(x-3)^2} = 10$$

$$\Rightarrow x + 6 = 10(x-3)^2 \Rightarrow 10x^2 - 61x + 84 = 0 \Rightarrow x = \frac{61 \pm \sqrt{61^2 - 4\cdot 10\cdot 84}}{20} = \frac{61 \pm 19}{20} = \begin{cases} 4 \\ 2{,}1 \end{cases}.$$

La solución $x = 2{,}1$ no es válida, pues al sustituir en $\log(x-3)$ no puede calcularse.

10. La población de una determinada región crece anualmente a un ritmo del 2 %. Si actualmente tiene 750000 habitantes, ¿cuántos años han de pasar para que llegue a tener 1 millón?

<u>Solución</u>:

Conviene utilizar la fórmula $P = P_0\cdot e^{rt}$, siendo: P_0 la población inicial; $r = \frac{2}{100} = 0{,}02$; t = número de años.

Se obtiene: $P(t) = 750000\cdot e^{0{,}02t}$.

Si se quiere que $P(t) = 1000000$, entonces:

$$1000000 = 750000e^{0{,}02t} \Rightarrow \frac{4}{3} = e^{0{,}02t} \Rightarrow \ln\frac{4}{3} = \ln e^{0{,}02t} \Rightarrow \ln\frac{4}{3} = 0{,}02t \Rightarrow t = \frac{0{,}287682}{0{,}02} = 14{,}38$$

Deben pasar 14,38 años.

→ Si se utiliza el modelo $P = P_0(1+r)^t$, que da resultados aceptables, se obtiene:

$$1000000 = 750000(1+0,02)^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} = 1,02^t \Rightarrow \log\frac{4}{3} = \log 1,02^t \Rightarrow \log\frac{4}{3} = t\cdot\log 1,02 \Rightarrow t = \frac{0,12493...}{0,0086...} = 14,527... \text{ años.}$$

11. Un equipo de fútbol de categoría regional comenzó con 100 socios. Desde su fundación el número de socios creció de manera uniforme (con crecimiento porcentual igual año a año). Si al cabo de 9 años el número de socios era de 3844, ¿a qué porcentaje creció anualmente?
Solución:
El problema puede tratarse como un problema de interés compuesto, siendo la tasa de crecimiento anual *r*, que es desconocida.

En este caso, el modelo que da el número de socios al cabo de *t* años será: $N(t) = 100(1+r)^t$.

Si *t* = 9 años, como $N(9) = 3844$, se tendrá:

$$3844 = 100\cdot(1+r)^9 \Rightarrow 38,44 = (1+r)^9 \rightarrow \text{aplicando logaritmos} \rightarrow \log(38,44) = 9\cdot\log(1+r) \Rightarrow$$

$$\frac{\log(38,44)}{9} = \log(1+r) \Rightarrow 0,176087042 = \log(1+r) \Rightarrow 1+r = 1,499985435 \Rightarrow r = 0,49998.$$

Que *r* = 0,49998 significa que el crecimiento anual es del 50 %, aproximadamente.

12. Supongamos que la cantidad de madera de un bosque aumenta un 6 % anualmente. Si en el año 2020 había una cantidad de madera equivalente a 1000 toneladas:
a) Escribe la expresión de la función que proporciona la cantidad de madera que habrá al cabo de *x* años (desde el año 2020). ¿Qué cantidad de madera habrá en 2030?
b) ¿Cuánto tiempo debe pasar para que la cantidad de madera sea doble que la del año 2020?
c) Haz la gráfica que representa la cantidad de madera a lo largo del tiempo. (En eje *OY* puede tomarse 1 = 1000 t; en el eje *OX*, *x* = 0 indica el año 2020).
Solución:

a) Cada año la cantidad de madera se multiplica por 1,06. Por tanto: $C(t) = 1000\cdot(1,06)^x$.

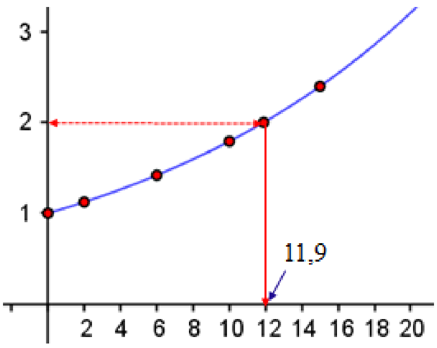
En 2020, *x* = 0; en 2030, *x* = 10. Por tanto, $C(10) = 1000\cdot(1,06)^{10}$ = 1790,8 toneladas.

b) Hay que resolver la ecuación:

$$2000 = 1000\cdot(1,06)^x \Rightarrow 2 = 1,06^x \Rightarrow \log 2 = \log\left(1,06^x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2 = x\cdot\ln 1,06 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 1,06} \approx 11,9 \text{ años.}$$

c) Pueden darse algunos valores:
(0, 1); (2, 1,12); (6, 1,42); (10, 1,79); (15, 2,4).



Observación:
También puede utilizarse (y es más real, ya que el crecimiento es continuo) la función $C(t) = 1000e^{0,06x}$. Con esto los resultados difieren ligeramente. Así, el tiempo que tarda en duplicarse la cantidad de madera es la solución de $2 = e^{0,06x} \Rightarrow \ln 2 = 0,06x \Rightarrow x \approx 11,55$ años. La gráfica también crece un poco más.

13. La función que da el valor de un automóvil a partir del momento de su adquisición es $P(t) = 25000 \cdot 1,2^{-t}$, t en años y P en euros.

a) ¿Cuánto costó nuevo?

b) ¿Cuánto valdrá a los 2 años de su adquisición?

c) Representa gráficamente la función $P(t)$ en el intervalo [0, 10]. (En el eje vertical puedes adaptar la escala de manera que 1 = 5000 €).

Solución:

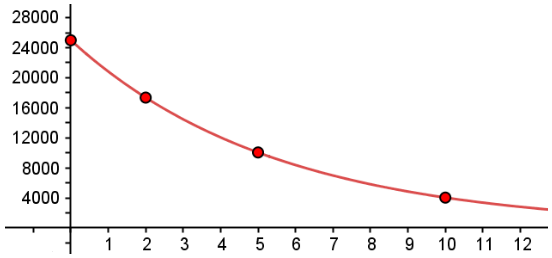
a) Nuevo: $t = 0 \to P(0) = 25000 \cdot 1,2^{0} = 25000$ euros.

b) A los 2 años: $t = 2 \to$

$P(2) = 25000 \cdot 1,2^{-2} = 25000 \cdot 0,694... = 17362,1...$

c) Para $t = 5$: $P(5) = 25000 \cdot 1,2^{-5} = 10046,93$;

Para $t = 10$: $P(10) = 25000 \cdot 1,2^{-10} = 4037,64$.



14. Supongamos que la función que da la cantidad (en porcentaje) de un determinado fármaco presente en sangre (en mg), respecto al tiempo (en horas), desde el momento en que este es inyectado, viene dada por $C(t) = 100 \cdot \left(0,85^{t}\right)$.

a) ¿Qué porcentaje queda al cabo de 4 horas?

b) ¿Si se supone que cuando queda en sangre menos de un 2 % de la dosis inicial el fármaco deja de hacer efecto, ¿en qué momento dejará de hacer efecto el fármaco inyectado?

Solución:

a) Para $t = 4$: $C(4) = 100 \cdot 0,85^{4} = 100 \cdot 0,5220 = 52,20$ %.

c) Hay que resolver la ecuación: $2 = 100 \cdot 0,85^{t}$.

$$2 = 100 \cdot 0,85^{t} \Rightarrow 0,02 = 0,85^{t} \Rightarrow \log 0,02 = t \cdot \log 0,85 \Rightarrow t = \frac{\log 0,02}{\log 0,85} \approx 24,07.$$

15. En determinadas condiciones, una población de mosquitos crece ajustándose a la función $f(x) = 2 + 0,5e^{0,4x}$, donde $f(x)$ es el número de mosquitos en miles y x el tiempo en días desde el momento presente. ¿Cuánto tiempo, en días, tardará en duplicarse la población inicial?

Solución:

La población inicial es $f(0) = 2 + 0,5e^{0} = 2,5$.

Se duplicará cuando sean 5 (millares), el doble de 2,5:

$$2 + 0,5e^{0,4x} = 5 \Rightarrow 0,5e^{0,4x} = 3 \Rightarrow e^{0,4x} = 6$$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\ln\left(e^{0,4x}\right) = \ln 6 \Rightarrow 0,4x = \ln 6 \Rightarrow x = \frac{\ln 6}{0,4} \approx 4,48 \text{ días.}$$

16. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \sin x$, representa las funciones:

a) $f_1(x) = 2(\sin x)$; b) $f_2(x) = \sin(2x)$; c) $f_3(x) = \dfrac{\sin x}{2}$; d) $f_4(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Solución:

La función $f(x) = \sin x$ es periódica de periodo 2π; toma valores entre –1 y 1.

Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/2, 1); (π, 0); (3π/2, –1); (2π, 0).

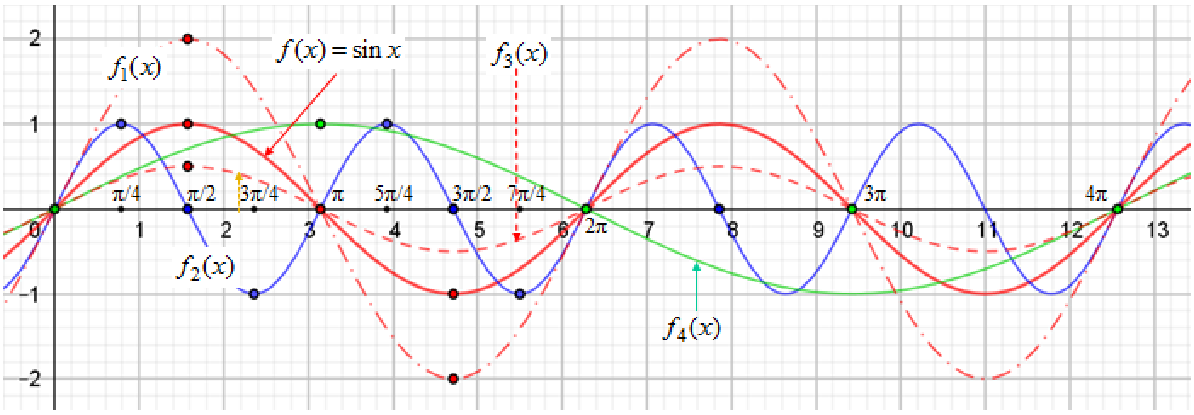
a) La función $f_1(x)=2(\sin x)$ multiplica por 2 todos los resultados de $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –2 y 2. También es periódica de periodo 2π.
Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/2, 2); (π, 0); (3π/2, –2); (2π, 0).

b) La función $f_2(x)=\sin(2x)$ contrae (a la mitad) a $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –1 y 1. Es periódica de periodo π.
Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/4, 1); (π/2, 0); (3π/4, –1); (π, 0).

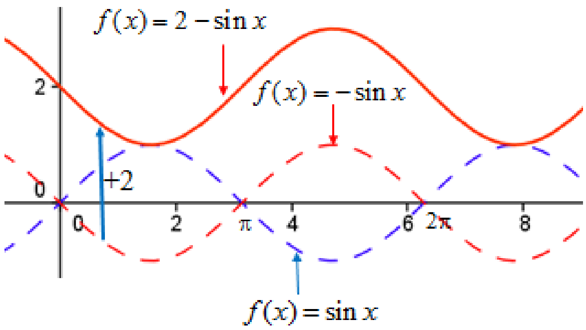
c) La función $f_3(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ divide por 2 todos los resultados de $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –0,5 y 0,5. También es periódica de periodo 2π.
Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π/2, 0,5); (π, 0); (3π/2, –0,5); (2π, 0).

d) La función $f_4(x)=\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ dilata (al doble) a $f(x)=\sin x$; sus valores varían entre –1 y 1. Es periódica de periodo 4π.
Algunos puntos en el primer ciclo: (0, 0); (π, 1); (2π, 0); (3π, –1); (4π, 0).

Sus gráficas son las que se indican en siguiente figura.

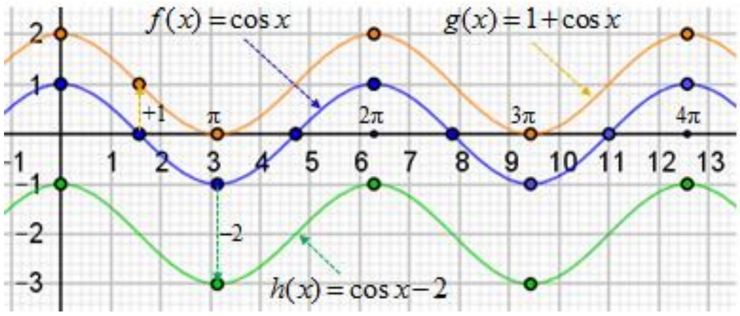


17. A partir de la gráfica de la función $f(x)=\sin x$, representa la función $f(x)=2-\sin x$.
<u>Solución</u>:
Primero se representa la función $f(x)=\sin x$; después $f(x)=-\sin x$ → hay que voltear la gráfica: lo positivo se hace negativo, y viceversa. Por último, se desplaza 2 unidades hacia arriba. Se obtiene la gráfica adjunta.



18. A partir de la gráfica de $f(x)=\cos x$ dibuja, en el mismo intervalo [0, 4π], la gráfica de las funciones $g(x)=1+\cos x$ y la de $h(x)=\cos x-2$.

Solución:



La función $f(x)=\cos x$ está definida en todo **R**, es periódica de periodo 2π (se repite en cada intervalo de amplitud 2π); toma valores entre –1 y 1.

→ La función $g(x)=1+\cos x$ es la trasladada de $f(x)$ una unidad hacia arriba; toma valores entre 0 y 2.

→ $h(x)=\cos x-2$ es la trasladada de $f(x)$ dos unidades hacia abajo; toma valores entre –3 y –1.

19. Halla dos valores para α, en grados, sabiendo que:

a) sin α = 0,6;	b) cos α = 0,5;	c) tan α = –2;	d) sin α = 0;
e) sin α = –0,7;	f) cos α = –0,7;	g) tan α = 1;	h) cos α = 0.

Solución:
Hay que aplicar las funciones trigonométricas inversas. (Los resultados se redondearán a centésimas de grado).
Advertencia:
Al hallar $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$, las calculadoras suelen dar el valor más cercano a 0º, que no siempre es la solución buscada. (Recuerda que entre 0º y 360º, en la primera vuelta, hay dos ángulos cuya razón trigonométrica es la misma). Por tanto, el valor del ángulo elegido dependerá de la naturaleza del problema, de los datos conocidos.

a) sin α = 0,6 ⇒ α = $\sin^{-1}$ 0,6 = 36,87º. El otro ángulo es 180 – α = 143,13.

b) cos α = 0,5 ⇒ α = $\cos^{-1}$ 0,5 = 60º. El otro ángulo es 360 – α = 300º.

c) tan α = –2 ⇒ α = $\tan^{-1}$ (–2) = –63,43º = 360 – 63,64 = 296,570. El otro ángulo es 180 + α = 180 + (–63,43) = 116,57º.

d) sin α = 0 ⇒ α = $\sin^{-1}$ 0 = 0º. El otro ángulo es 180 – α = 180º.

e) sin α = –0,7 ⇒ α = $\sin^{-1}$ (–0,7) = –44,43º. El otro ángulo es 180 – α = 180 – (–44,43) = 224,43º. El ángulo –44,43º = 360 – 44,43 = 315,57º.

f) cos α = –0,7 ⇒ α = $\cos^{-1}$ (–0,7) = 134,43º. El otro ángulo es 360 – 134,43º = 225,57º.

g) tan α = 1 ⇒ α = $\tan^{-1}$ 1 = 45º. El otro ángulo es 180 + α = 180 + 45 = 225º.

h) cos α = 0 ⇒ α = $\cos^{-1}$ 0 = 90º. El otro ángulo es 360 – 90 = 270º.

20. Halla dos valores de α, en radianes, sabiendo que:

a) sin α = 0,3;	b) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$;	c) tan α = 2;	d) cos α = –1.

Solución:
La calculadora debe ponerse en el modo radianes. MODE RAD. (Los resultados se redondearán a diezmilésimas).

a) sin α = 0,3 ⇒ α = $\sin^{-1}$ 0,3 = 0,3047. El otro valor en el primer ciclo es π – 0,3047 = 28369.

b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,5236$. El otro valor es 2π – 0,5236 = 5,7198.

c) tan α = 2 ⇒ α = $\tan^{-1}$ 2 = 1,1071. El otro valor es 1,1071 + π.

d) cos α = –1 ⇒ α = $\cos^{-1}$ (–1) = π. Otro valor es 3π.
Nota:
Puedes dar otros resultados. Aquí se han buscado los del primer ciclo, salvo en el último caso, pues solo hay una solución en cada ciclo.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) sin 2$x$ = 0,5; c) $\sin\frac{x}{2} = -0,5$; d) $\sin 3x = -1$.
Solución:
En primer lugar se dará la solución en grados, después se expresará en radianes (la equivalencia es 180º = π radianes).

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45^o \rightarrow$ las soluciones de la primera vuelta son: 135º y 315º.

(315º = 360º – 45º, que es la solución que sale en la calculadora; la otra solución es 180º – 45º = 135º).

Todas las soluciones son: $x = \begin{cases} 135^o + k\cdot 360^o \\ 315^o + k\cdot 360^o \end{cases} \rightarrow$ en radianes: $x = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$.

b) sin 2x = 0,5 ⇒ $2x = \arcsin 0,5 = \begin{cases} 30^o + k\cdot 360^o \\ 150^o + k\cdot 360^o \end{cases} \rightarrow$ (despejando x: se divide por 2) →

$x = \begin{cases} 15^o + k\cdot 180^o \\ 75^o + k\cdot 180^o \end{cases}$. (Comprueba, por ejemplo, si x = 15º, sin (2·15º) = sin 30º = 0,5).

En radianes: $x = \begin{cases} \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.

La función $f(x) = \sin 2x$ es periódica de periodo π.

c) $\sin\frac{x}{2} = -0,5 \Rightarrow \frac{x}{2} = \arcsin(-0,5) = \begin{cases} -30^o + k\cdot 360^o \\ 210^o + k\cdot 360^o \end{cases} = \begin{cases} 330^o + k\cdot 360^o \\ 210^o + k\cdot 360^o \end{cases} \rightarrow$ (despejando x: se multiplica por 2) → $x = \begin{cases} 660^o + k\cdot 720^o \\ 420^o + k\cdot 720^o \end{cases}$.

En radianes: $x=\begin{cases}\dfrac{11\pi}{3}+4k\pi\\ \dfrac{7\pi}{3}+4k\pi\end{cases}$. (La función $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}$ es periódica de periodo 4π).

Nota: Sería un grave error escribir: $\sin\dfrac{x}{2}=-0,5 \Rightarrow \sin x=-1\ldots$ Ojo: $\sin\dfrac{x}{2}\neq\dfrac{\sin x}{2}$.

d) $\sin 3x=-1 \Rightarrow 3x=\arcsin(-1)=270^o+k\cdot 360^o \to$ (despejando) $\to x=90^o+k\cdot 120^o\equiv\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2k\pi}{3}$.

(La función $f(x)=\sin(3x)$ es periódica de periodo 2π/3).

22. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; b) $2\cos x=\sqrt{2}$; c) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$; d) $\cos 4x=0,5$.

Solución:

a) $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=30^o$. El otro ángulo es 360º – 30º = 330º.

Todas las soluciones son: $x=\begin{cases}30^o+k\cdot 360^o\\ 330^o+k\cdot 360^o\end{cases}\to$ en radianes: $x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ \dfrac{11\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$.

b) $2\cos x=\sqrt{2} \Rightarrow \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{cases}45^o+k\cdot 360^o\\ 315^o+k\cdot 360^o\end{cases}\to x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\\ \dfrac{7\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$.

c) $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x}{2}=\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\begin{cases}120^o+k\cdot 360\\ 240^o+k\cdot 360\end{cases}\to$ despejando: $x=\begin{cases}240^o+k\cdot 720^o\\ 480^o+k\cdot 720^o\end{cases}$.

En radianes $x=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{3}+4k\pi\\ \dfrac{8\pi}{3}+4k\pi\end{cases}$. (La función $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$ es periódica de periodo 4π).

d) $\cos 4x=0,5 \Rightarrow 4x=\cos^{-1}0,5=\begin{cases}60^o+k\cdot 360\\ 120^o+k\cdot 360\end{cases}\to$ despejando: $x=\begin{cases}15^o+k\cdot 90^o\\ 30^o+k\cdot 90^o\end{cases}$.

En radianes: $x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{1}{2}k\pi\\ \dfrac{2\pi}{12}+\dfrac{1}{2}k\pi\end{cases}$. (La función $f(x)=\cos 4x$ es periódica de periodo π/2).

23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\tan x = -1$; b) $2\tan x = 3$; c) $\tan(2x) = -\sqrt{3}$; d) $2\tan\frac{x}{4} = 0$.

Solución:

a) $\tan x = -1 \Rightarrow x = \tan^{-1}(-1) = -45^{\circ} \rightarrow x = 180^{\circ} - 45^{\circ} = 135^{\circ}$. El otro ángulo es 135º + 180º = 315º.
Como $f(x) = \tan x$ es periódica de periodo π = 180º, las soluciones son: $x = -45^{\circ} + k\cdot 180^{\circ}$.

En radianes: $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$.

b) $2\tan x = 3 \Rightarrow \tan x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 56,31^{\circ} + k\cdot 180^{\circ}$.

c) $\tan(2x) = -\sqrt{3} \Rightarrow 2x = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) \Rightarrow 2x = -60^{\circ} + k\cdot 180^{\circ} \Rightarrow x = -30^{\circ} + k\cdot 90^{\circ} \rightarrow x = 60^{\circ} + k\cdot 90^{\circ}$

En radianes: $x = -\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{\pi}{2}$.

d) $2\tan\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \tan\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = \tan^{-1} 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = 0^{\circ} + k\cdot 180^{\circ} = k\cdot 180^{\circ} \Rightarrow x = k\cdot 760^{\circ} \rightarrow x = 4k\pi$.