LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Sigue cuidando la lectura de gráficos; observa los detalles de los que se dan en este tema.
Así podrás entender con cierta profundidad el concepto de límite.

1. Idea de límite de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función de variable real. (Esto significa que a cada número real x la "fórmula" $f(x)$ de la función, toma un único valor y). Cuando se hace su gráfica, la variable independiente x se representa en el eje horizontal, eje OX; la variable dependiente y, en el eje vertical OY.

Tendencias

- Decir que x tiende a a, que se escribe $x \to a$, significa que x toma valores próximos a a, menores o mayores que a, pero cercanos (tan próximos como se quiera). Por ejemplo, $x \to 2$ significa que x toma valores como los siguientes:

  $x = 1{,}9$; $x = 1{,}99$; $x = 1{,}999$; ... (en este caso $x \to 2$ por la izquierda; se escribe $x \to 2^-$);

  o bien,

  $x = 2{,}1$; $x = 2{,}01$; $x = 2{,}001$; ... (en este caso $x \to 2$ por la derecha: $x \to 2^+$)

- Decir que $f(x)$ tiende a l, y se escribe $f(x) \to l$, significa que $f(x)$ toma valores próximos a l, menores o mayores que l, pero muy próximos.

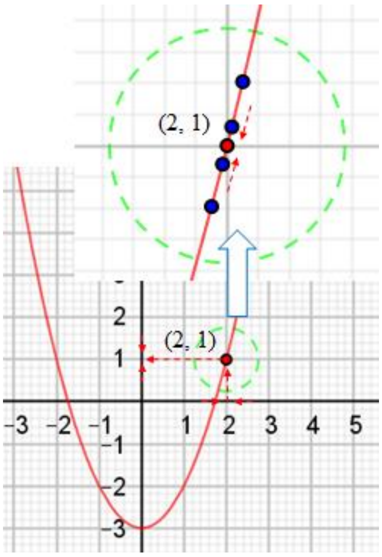
Ejemplo:

Si se considera la función $f(x) = x^2 - 3$, puede verse que si $x \to 2$, entonces $f(x) \to 1$.

Así se deduce considerando los valores dados en la tabla siguiente:

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
Valores de x:	1,9	1,99	1,999		2,001	2,01	2,1
Valores de $f(x) = x^2 - 3$	0,61	0,9601	0,996001	$\to 1 \leftarrow$	1,004001	1,0401	1,41

Efectivamente, tanto si $x \to 2^-$ como si $x \to 2^+$ la función toma valores próximos a 1.



Gráficamente puede verse que, para valores de x próximos a 2, el valor de la función $f(x) = x^2 - 3$ se aproxima a 1. Por ambos lados, los puntos de la curva se acercan a (2, 1).

En torno al punto (2, 1), la gráfica de f puede encerrarse en un círculo tan pequeño como se quiera.

La notación que suele emplearse es: $\lim_{x \to 2} \left(x^2 - 3\right) = 1$.

$\to$ Se lee: límite de $\left(x^2 - 3\right)$ cuando x tiende a 2 es igual a 1.

Idea de límite

En general, $\lim_{x \to a} f(x) = l$, significa que cuando x se acerca a a, todos los valores que toma $f(x)$ se acercan a l todo lo que se quiera.

$\to$ El comportamiento de $f(x)$ debe ser el mismo tanto si x se acerca a a por la izquierda ($x \to a^-$), como si x se acerca a a por la derecha ($x \to a^+$).

Esto es, si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l$, entonces existe el límite y vale l: $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Por tanto, para que exista límite es necesario que existan los límites laterales y que sean iguales.

Deducciones que pueden hacerse a partir del límite

- El estudio del límite de una función en un punto permite determinar cómo se comporta esa función, $f(x)$, cuando la variable x se aproxima a un punto concreto a. Pudiendo suceder:

1) Que cuando $x \to a$, entonces $f(x) \to f(a)$. Es lo que pasa en el ejemplo anterior, ya que $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3\right) = f(2) = 1$. En este caso se dirá que la función es continua en el punto $x = a$.

2) Que la función tome valores distintos por la izquierda y por la derecha de a. Esto es, que $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. En este caso la función no tiene límite; pudiéndose admitir que tenga límite solo por la izquierda, o solo por la derecha, o por ambos lados, aunque distintos

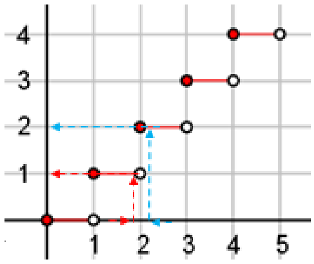
3) Que la función tome valores muy grandes, infinitamente grandes. En este caso tampoco existe límite, aunque podría escribirse $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, siendo esta la manera de decir que, en las cercanías de a, la función toma valores tan grandes como se quiera.

4) Que no se sepa lo que pasa, porque la función se comporte de manera "indeterminada"; esto requerirá un estudio más detallado.

Ejemplos:

a) Recuerda que la función parte entera de x se define como el número entero inmediatamente menor o igual a x; pues bien, si $x \to 2$, la función $f(x) = ENT[x]$ se comporta como sigue:

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$f(x)$:	1	1	1	$\to$ ¿? $\leftarrow$	2	2	2



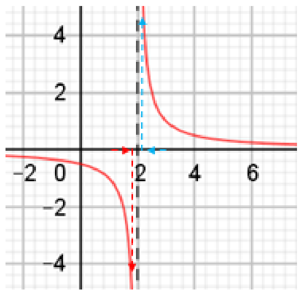
Cuando $x \to 2^-$, la función toma siempre el valor 1 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} ENT[x] = 1$.

Cuando $x \to 2^+$, la función toma siempre el valor 2 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} ENT[x] = 2$.

En este caso, $\lim\limits_{x\to 2} ENT[x]$ no existe. (Puede admitirse la existencia de límites laterales).

b) Para $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, cuando $x \to 2$, se tiene:

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$f(x)$:	–10	–100	–1000	$\to$ ¿? $\leftarrow$	1000	100	10

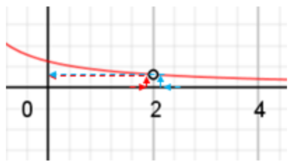


Cuando $x \to 2^-$, la función toma valores cada vez más grandes y negativos.
Cuando $x \to 2^+$, la función toma valores cada vez más grandes y positivos.
Evidentemente la función no tiene límite, aunque puede escribirse

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \pm\infty \to$ Estos casos están ligados a la existencia de asíntotas verticales.

c) Para $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$, cuando $x \to 2$, se tiene:

	$x \to 2^-$				$2^+ \leftarrow x$		
x:	1,9	1,99	1,999	… …	2,001	2,01	2,1
$f(x)$:	0,2564	0,2506	0,25006	$\to$ 0,25 $\leftarrow$	0,24994	0,2494	0,2439



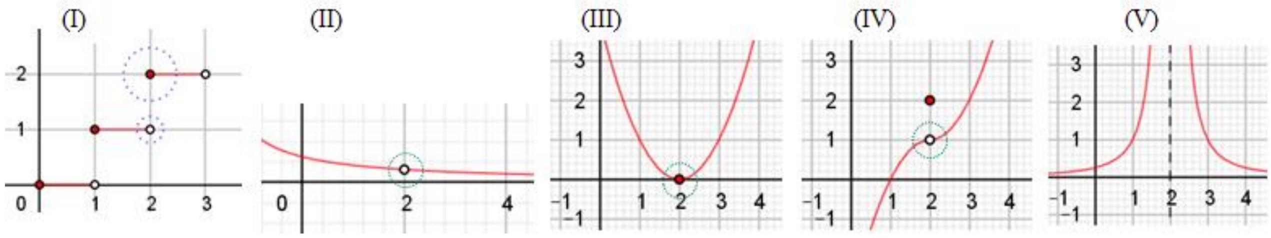
Aunque la función no está definida en $x = 2$, tanto por la izquierda como por la derecha, toma valores tan próximos a 0,25 como en quiera. Por tanto, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = 0,25$.

Consideraciones gráficas

Como se ha visto en el ejemplo anterior, para que exista el límite en un punto no es necesario que la función esté definida en ese punto. Esto sugiere que lo que importa son los valores que toma la función cuando $x \to a$, no cuando $x = a$. Por eso, puede darse el siguiente criterio gráfico:

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, entonces, en los alrededores del punto (a, l), la gráfica de la función puede encerrarse en un círculo tan pequeño como se quiera, sin importar lo que pase en $x = a$.

Esta idea se puede explicar con ayuda de las siguientes gráficas de funciones.



En la figura (I) se observa que $\lim_{x\to 2} ENT[x]$ no existe. La gráfica de $f(x) = ENT[x]$, en puntos cercanos a x = 2, sale fuera de los círculos trazados.

En la figura (II), que es la de $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$, cuando x se acerca 2, su gráfica está encerrada dentro del círculo marcado; salvo el punto (2, 0,25), del que no se dice nada. En este caso existe el límite en x = 2 y vale 0,25: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = 0,25$. (Aunque la función no es continua en ese punto).

En la figura (III), que es la de la función $f(x) = (x-2)^2$, para valores de x cercanos a 2, su gráfica está encerrada dentro del círculo marcado. Existe el límite en x = 2 y vale 0: $\lim_{x\to 2} (x-2)^2 = 0$.
Como el valor del límite coincide con $f(0)$, la función es continua en x = 2.

En la figura (IV), que es la de la función $f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+1, & \text{si } x<2 \\ 2, & \text{si } x=2 \\ (x-2)^2+1, & \text{si } x>2 \end{cases}$, para valores de x cercanos a 2, su gráfica está encerrada dentro del círculo marcado, salvo el punto (2, 2). En este caso también existe el límite en x = 2 y vale 1: $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$. (La anomalía del punto (2, 2) hace que la función no sea continua en x = 2).

En la figura (V), que es la de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, para valores de x cercanos a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, la función toma valores cada vez más grandes. En este caso no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, aunque puede escribirse que $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$, para indicar que la función se hace infinitamente cuando $x \to 2$.

2. Cálculo práctico de límites

Casos inmediatos
Si $f(x)$ es una función usual (polinómica, racional, exponencial, logarítmica, etc.) y está definida en el punto *x* = *a*, *suele cumplirse* que: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto es, el límite se resuelve sustituyendo.
Por tanto, lo primero que debe hacerse para calcular un límite es sustituir *x* por *a*: hallar $f(a)$. Si existe $f(a)$ y la función no está definida a trozos, se aceptará que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

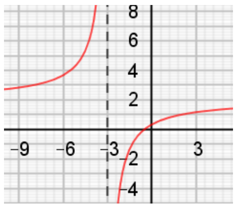
Ejemplos:
a) $\lim_{x\to a} k = k$. En particular, $\lim_{x\to 4}(-3) = -3$.
b) $\lim_{x\to a}(3x-5) = 3a-5$: (se sustituye *x* por *a*).
c) $\lim_{x\to 0}\left(x^2+3x-5\right) = (0+0-5) = -5$.
d) $\lim_{x\to 2}(x-2)^2 = (2-2)^2 = 0$.
e) $\lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x+2} = \frac{3-1}{1+2} = \frac{2}{3}$.
f) $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+2} = \frac{3-3}{9+2} = \frac{0}{11} = 0$.
g) $\lim_{x\to -1} 2^{x+1} = 2^{-1+1} = 2^0 = 1$.
h) $\lim_{x\to -2}\left(\ln\left(x^2-3\right)\right) = \ln\left((-2)^2-3\right) = \ln 1 = 0$.

<u>Cuando la función no está definida en el punto *x* = *a*</u>, pueden darse tres posibilidades:
1.ª Que no tenga sentido calcular el límite.

Ejemplo:
Para la función $f(x) = \log(x-3)$ no tiene sentido calcular el límite en el punto *x* = 2, pues la función no está definida para valores próximos a 2, cuando $x \to 2$.
Sí podría calcularse el límite cuando *x* > 3. En particular, si $x \to 13$, $\lim_{x\to 13}\log(x-3) = \log 10 = 1$.

2.ª Que no exista el límite por ser su valor infinito.
Esto sucede cuando al sustituir aparece la expresión $\frac{k}{0}$, que no está definida, pero que toma valores muy grandes cuando el denominador se acerca a 0. En ese caso, aunque no existe el límite, puede decirse que vale ∞ y escribir $\lim_{x\to a} f(x) = \frac{k}{0} = \infty$.

Ejemplos:
a) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$ → La expresión $\frac{1}{0}$ no está definida; pero el cociente "1 entre un número cada vez más próximo a 0" es cada vez más grande: se dice que vale ∞.



b) Igualmente, $\lim_{x\to 1}\frac{2}{x-1} = \frac{2}{1-1} = \frac{2}{0} = \pm\infty$.
Observa que se ha puesto ±∞, pues la función se comporta de manera diferente a izquierda y derecha del punto *x* = 1. (Más adelante se hará con detalle).

3.ª Que exista el límite (aunque deberá calcularse por métodos específicos)
Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ no está definida en *x* = 2, pues $f(2) = \frac{2-2}{2^2-4} = \frac{0}{0} \to ?$; no obstante, tiene límite en ese punto, siendo $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} = 0,25$, como se ha visto al principio del tema y justificado en la figura (II) de la página anterior.

Límites de funciones racionales cuando $x \to a$

Las funciones racionales son de la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Al hacer el límite, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se presentan tres casos:

<u>Caso 1</u>.

Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ está definida en $x = a$ (sucede si $Q(a)\neq 0$), entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(a)}{Q(a)}$.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+5}{x^2-2x-1}=\dfrac{3(-1)+5}{(-1)^2-2(-1)-1}=\dfrac{2}{2}=1$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{2x-1}=\dfrac{2^2-4}{2\cdot 2-1}=\dfrac{0}{3}=0$.

<u>Caso 2</u>.

Si $Q(a)=0$ y $P(a)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\left[\dfrac{P(a)\neq 0}{Q(a)=0}\right]=\infty$. (No existe el límite).

En este caso la función tiene una asíntota vertical, la recta $x = a$.

→ <u>Aplicación: determinación de asíntotas verticales</u>

Cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ se dice que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y=f(x)$.

En este caso, si fuese necesario hacer un estudio de la gráfica de $y=f(x)$, hay que calcular los límites laterales para determinar el signo de ese ∞, pues su comportamiento puede ser diferente a izquierda y derecha de $x = a$.

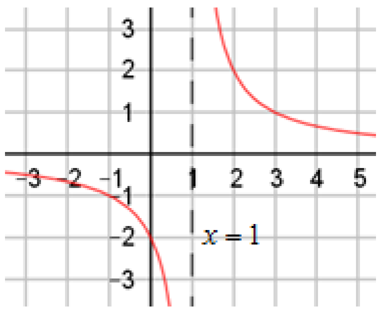
Así, como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{1-1}=\dfrac{2}{0}=\pm\infty \Rightarrow x = 1$ es asíntota vertical.

- Por la izquierda: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{1^- -1}=\dfrac{2}{0^-}=-\infty$.

Si $x\to 1^-$, $x-1\to 0^-$ (puedes probar con $x = 0,999$).

- Por la derecha: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{1^+ -1}=\dfrac{2}{0^+}=\infty$.

Si $x\to 1^+$, $x-1\to 0^+$ (puedes probar con $x = 1,001$).



<u>Caso 3</u>. La indeterminación $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Si $Q(a)=0$ y $P(a)=0$, quedaría $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. El límite se puede resolver transformando el cociente, ya que:

- Si $Q(a)=0 \Rightarrow a$ es raíz de $Q(x) \Rightarrow (x-a)$ es un factor de $Q(x) \Rightarrow Q(x)=(x-a)\cdot Q_1(x)$.
- Igualmente, si $P(a)=0 \Rightarrow P(x)=(x-a)\cdot P_1(x)$.

Luego:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\cancel{(x-a)}\cdot P_1(x)}{\cancel{(x-a)}\cdot Q_1(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}\cdot P_1(x)}{\cancel{(x-a)}\cdot Q_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

Para resolver el último límite se aplica nuevamente alguno de los tres casos vistos. En particular, si volviese a salir 0/0 se reiterará el procedimiento del caso 3.

Ejemplos:

a) Comenzamos con el resultado ya conocido de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=0,25$.

En efecto, al sustituir, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ → descomponiendo en factores el denominador,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\left(\cancel{x-2}\right)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}=0,25.$$

Comprueba que $x^2-4=(x-2)(x+2)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\left(\cancel{x-1}\right)}{x\left(\cancel{x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{1+1}{1}=2$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-2x^3+3x^2}{2x^3-3x^2-5x}$: al sustituir queda $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Sacando factor común *x* en ambos términos, se tiene: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-2x^3+3x^2}{2x^3-3x^2-5x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}\left(3x^3-2x^2+3x\right)}{\cancel{x}\left(2x^2-3x-5\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3-2x^2+3x}{2x^2-3x-5}=\dfrac{0}{-5}=0$.

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+3x}{x^2+6x+9}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x\left(\cancel{x+3}\right)}{(x+3)\left(\cancel{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{-3}{0}=\pm\infty$. No existe el límite.

e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+4x+2}{x^3+x^2-x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\left(\cancel{x+1}\right)\cdot(x+1)}{\left(\cancel{x+1}\right)\left(x^2-1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2\cdot(x+1)}{\left(x^2-1\right)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ → se repite el proceso:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot(x+1)}{\left(x^2-1\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{2\cdot\left(\cancel{x+1}\right)}{\left(\cancel{x+1}\right)(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2}{(x-1)}=\frac{2}{-1-1}=-1.$$

<u>Indeterminaciones matemáticas y otras observaciones</u>

En Matemáticas hay siete casos en los que al sustituir el valor $x = a$ en la función dada se llega a situaciones extrañas, no definidas, que reciben el nombre de <u>formas indeterminadas</u>.

Escritas esquemáticamente, estas 7 indeterminaciones son:

$$\left[\frac{0}{0}\right]\quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\quad [0\cdot\infty]\quad [\infty-\infty]\quad [1^{\infty}]\quad [0^0]\quad [\infty^0]$$

- Conviene aclarar que cuando en estas expresiones se escribe 0 se quiere significar que se está ante un valor tan pequeño como se quiera (positivo o negativo, pero infinitesimal). Lo mismo pasa cuando se escribe 1, para indicar un valor que se acerca a 1 (tomando valores como 0,999… o 1,000…). Por último, ∞ designa un valor mayor (en valor absoluto) que cualquier número dado.
- Algunas veces estas formas indeterminadas pueden resolverse. Los métodos de resolución que se emplean este curso son básicamente algebraicos (simplificar, extraer factor común, multiplicar y dividir por expresiones conjugadas, operar con potencias y raíces, …), que permiten transformar la función inicial en otra equivalente no indeterminada en el punto en cuestión.
- En este curso se estudian solo las indeterminaciones $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ y $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. La primera de ellas, 0/0, ya se ha visto para funciones racionales; a continuación se estudiará para funciones con raíces. Inmediatamente después, para ambos tipos de funciones se abordará la resolución de ∞/∞.
- Como <u>advertencia</u>, conviene no confundir las expresiones $\left[\dfrac{0}{k}\right]$, $\left[\dfrac{k}{0}\right]$ y $\left[\dfrac{0}{0}\right]$:

1) $\left[\dfrac{0}{k}\right]$ = 0: tiende a 0; 2) $\left[\dfrac{k}{0}\right]$ = ∞: tiende a ∞; 3) $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ = ¿?: hay que resolverlo.

La indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ en funciones con raíces

En las funciones con radicales, la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ puede resolverse de dos formas:

1. Descomponiendo en factores y simplificando, como para las funciones racionales.
2. Multiplicando y dividiendo la función dada por la expresión conjugada de alguno de sus términos. A continuación, se opera y simplifica.

Observaciones:
1) En raíces de índice par hay que considerar si la raíz está definida en el punto de estudio.
2) Si no se advierte nada, en todos los casos se tomará el signo positivo de la raíz.
3) La expresión conjugada de $\sqrt{A}+B$ es $\sqrt{A}-B$; al multiplicarse: $\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{A}-B\right)=A-B^2$.

Ejemplos:

a) Para la función $f(x)=\sqrt{x-3}$ no tiene sentido calcular $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x-3}$, pues la función no está definida para valores próximos a 2, cuando $x \to 2$. Sí podría calcularse el límite cuando $x > 3$. En particular, cuando $x \to 3^+$, $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$; y si $x \to 7$, $\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x-3}=\sqrt{7-3}=\sqrt{4}=2$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{2x^2-4x}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Puede resolverse simplificando dentro de la raíz:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x-2}{2x^2-4x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{\cancel{x-2}}{2x\cdot\left(\cancel{x-2}\right)}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{1}{2x}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$ $\to$ Al sustituir se obtiene $\left[\dfrac{0}{0}\right]$: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}=\dfrac{3-3}{\sqrt{3+6}-3}=\dfrac{3-3}{3-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

La transformación que debe hacerse es multiplicar y dividir por la expresión conjugada del término que lleva la raíz: la expresión conjugada de $\sqrt{x+6}-3$ es $\sqrt{x+6}+3$. Esto se hace para eliminar la raíz cuadrada de ese término, pues $\left(\sqrt{x+6}-3\right)\cdot\left(\sqrt{x+6}+3\right)=\left(\sqrt{x+6}\right)^2-3^2=x+6-9=\underline{x-3}$.

Luego,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\boxed{\sqrt{x+6}+3}\right)}{\left(\sqrt{x+6}-3\right)\left(\boxed{\sqrt{x+6}+3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{x+6}-3\right)}{\underline{x-3}}=$$

(simplificando y sustituyendo) $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\cancel{x-3}\right)\left(\sqrt{x+6}-3\right)}{\cancel{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x+6}+3\right)=\sqrt{3+6}+3=3+3=6$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{2-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$ $\to$ se multiplican los términos de la fracción por el conjugado del numerador, que es $\sqrt{2x}+x$; queda: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{2x}-x\right)\cdot\left(\boxed{\sqrt{2x}+x}\right)}{(2-x)\cdot\left(\boxed{\sqrt{2x}+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{2x}\right)^2-x^2}{(2-x)\cdot\left(\sqrt{2x}+x\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-x^2}{(2-x)\cdot\left(\sqrt{2x}+x\right)}=$

$\to$ se saca factor común en el numerador:

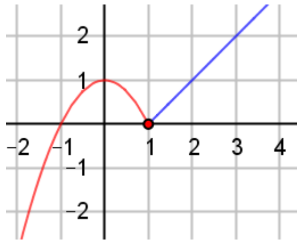
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x\left(\cancel{2-x}\right)}{\left(\cancel{2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{2x}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{\left(\sqrt{2x}+x\right)}=\frac{2}{\sqrt{2\cdot 2}+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Límites de funciones definidas a trozos

En las funciones definidas a trozos, para cada una de las funciones que intervengan vale lo dicho anteriormente; la única novedad es que hay que estudiar los límites laterales en los puntos de unión de los diferentes trozos.

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & \text{si } x\le 1 \\ x-1, & \text{si } x>1 \end{cases}$ tiene límite en todos los puntos.

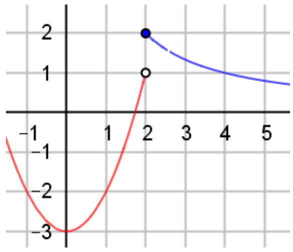


El único punto dudoso es x = 1, en el cual hay que estudiar los límites laterales:

- por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(1-x^2\right)=1-1=0$;
- por la derecha: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=1-1=0$.

Como ambos límites coinciden, existe el límite y vale 0.

b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{si } x<2 \\ \dfrac{4}{x}, & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$, no tiene límite en el punto x = 2,



pues sus límites laterales en ese punto no coinciden:

- por la izquierda: $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2-3\right)=4-3=1$;
- por la derecha: $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{2}=2$.

c) Si $f(x)=\begin{cases} x^2-2, & \text{si } x<-1 \\ 2x+m, & \text{si } x\ge -1 \end{cases}$, el valor que debe tomar el parámetro m para que exista el límite en x = –1, se determina imponiendo que los límites laterales en ese punto sean iguales. Esto es:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-}\left(x^2-2\right)=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\left(2x+m\right)=-2+m \end{cases} \Rightarrow -1=-2+m \Rightarrow m=1.$$

3. Límite de una función cuando $x \to \infty$

En este apartado se trata de estudiar cómo se comporta una función cuando la variable independiente se hace cada vez más grande, tan grande como se desee. (En las Ciencias Sociales, a veces, en vez de infinito, se emplea la expresión, “a largo plazo”; o “cuando pasa mucho tiempo”).

Algo sobre el infinito

Decir que $x \to +\infty$ significa que x se hace tan grande como se quiera.
Decir que $x \to -\infty$ significa que x se hace tan grande y negativo como se quiera.

- Las operaciones con el infinito no actúan exactamente igual que con números. Sin pretender ser exhaustivos se indican algunas:

$\infty + \infty = \infty$;	$-\infty - \infty = -\infty$;	$\infty \pm k = \infty$;	$-\infty \pm k = -\infty$;
$(+k)\cdot\infty = \infty$;	$(-k)\cdot\infty = -\infty$;	$\infty\cdot\infty = \infty$;	$\infty\cdot(-\infty) = -\infty$;
$\infty / (\pm k) = \pm\infty$;	$\pm k / \infty = 0$;	$\infty^{(+k)} = \infty$;	$\infty^{(-k)} = 0$;
$[\infty - \infty]$ es indeterminado;		$[\infty / \infty]$ es indeterminado.	

En todos los casos + k indica un número positivo (– k, negativo). Aquí, cuando se escribe ∞ sin signo, se supone positivo.

Límite de funciones polinómicas en el infinito

Si $P(x)$ es un polinomio de cualquier grado, se cumple que: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$.

El signo depende del término principal del polinomio (de su coeficiente y del exponente), valiendo en todos los casos las reglas de los signos.

Decir que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$ significa que cuando x se hace muy grande, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número dado: $|f(x)|$ es tan grande como se quiera siempre que $|x|$ sea lo suficientemente grande.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(7x+5) = 7\cdot\infty + 5 = \infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x+5) = 7\cdot(-\infty) + 5 = -\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3 - 3x - 9\right) = \infty$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3 - 3x - 9\right) = -\infty$.

Puede observarse que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^3-3x-9\right) = [\infty - \infty - 9] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(2x^2-3\right)-9\right) = \infty\cdot\infty - 9 = \infty$.

Igualmente, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-3x-9\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot\left(2x^2-3\right)-9\right) = (-\infty)\cdot\infty - 9 = -\infty - 9 = -\infty$.

<u>Consecuencias</u>

1. Si $Q(x)$ es un polinomio de cualquier grado, se cumple que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{k}{Q(x)} = 0$.

2. Para hallar el límite del cociente de dos monomios se simplifica y calcula.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{-2x+5} = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3-7x} = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x} = 0$.

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3}{2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 2x^2 = \infty$.

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

Límite del cociente de dos polinomios

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, $P(x)$ de grado n y $Q(x)$ de grado m, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}.$$

Solo se tienen en cuentan los términos principales, cumpliéndose que:

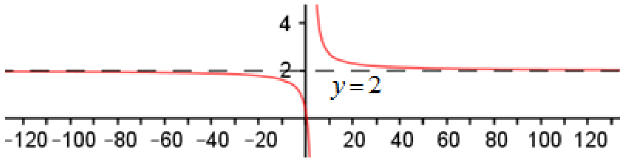
- Si $n > m$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty \to \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-7x}{5x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{5x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{5} = \infty$.
- Si $n = m$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_n} \to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x}{3x^2-4x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$.
- Si $n < m$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \to \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-7}{5x^2-4x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{5x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{5x} = 0$.

En todos los casos deben tenerse en cuenta las propiedades de los signos. Así, por ejemplo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+2x}{5x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{5x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{5} = -\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{4x+2}{3-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x} = \lim_{x\to-\infty}(-4) = -4.$$

→ <u>Aplicación: determinación de asíntotas horizontales</u>
Cuando el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador la función racional tiene una asíntota horizontal.
En general, si $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ se concluye que la recta $y = l$ es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$.
Esto significa que la gráfica de la función se acerca a la recta $y = l$ cuando $x \to \infty$.

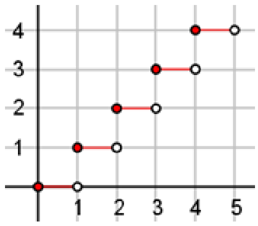
Ejemplo:
La función $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ tiende a 2 cuando $x \to +\infty$.
En efecto, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 = 2$.
También se cumple que
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2 = 2.$$



Luego, la recta $y = 2$ es asíntota horizontal hacia ambos lados.
Con la calculadora puedes ver que cuando x se hace muy grande, $f(x)$ se acerca a 2: si $x = 100$, $f(100) = 2,05$; si $x = 1000$, $f(1000) = 2,005$; … Como la función vale "algo más" de 2, la curva va por encima de la asíntota.
Lo mismo pasa cuando $x \to -\infty$: si $x = -100$, $f(-100) = 1,95$; si $x = -1000$, $f(-1000) = 1,995$; … Como la función vale "algo menos" de 2, la curva va por debajo de la asíntota.

4. Continuidad de una función

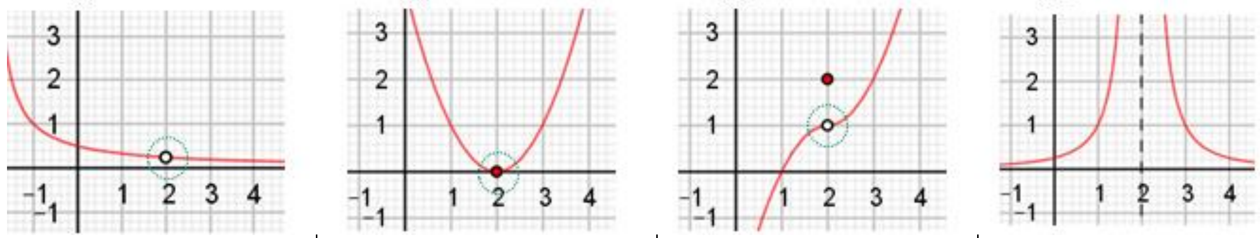
La idea gráfica de continuidad de una función es sobradamente conocida: una función es continua cuando puede trazarse sin levantar el lápiz del papel; cada vez que se produce un salto se tiene una discontinuidad. Así, por ejemplo, la función $f(x) = ENT[x]$ es discontinua en todos los valores enteros de x.
También suele decirse que una función es continua cuando a variaciones pequeñas de x le corresponden variaciones pequeñas de $f(x)$.



Su definición mediante límites es la siguiente:
$$f(x) \text{ es continua en el punto } x = a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
Esto exige que la función $f(x)$ esté definida en el punto $x = a$ y que su límite coincida con $f(a)$.

De las siguientes funciones, solo la dibujada en (b) es continua en $x = 2$.

(a) (b) (c) (d)



(a)	(b)	(c)	(d)
La función no está definida en $x = 2$; aunque existe el límite.	El límite y la función valen lo mismo: $\lim_{x \to 2} (x-2)^2 = 0 = f(2)$.	El límite no coincide con $f(2) = 2$, pues $\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \neq f(2)$.	La función no está definida; tampoco existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.

- En los casos (a) y (c) la discontinuidad puede evitarse. Se evita definiendo aparte $f(2)$.

En (a) la discontinuidad se evita definiendo $f(2) = 1/4$; en (c), redefiniendo $f(2) = 1$.

- Una <u>discontinuidad</u> (en $x = a$) es <u>evitable</u> cuando la función tiene límite en ese punto.

Continuidad de las funciones usuales
Las funciones usuales (polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) son continuas en todos los puntos de su dominio.

Ejemplos:
a) Todas las funciones polinómicas son continuas para todo número real. En particular, las funciones $f(x)=-x^3+3x^2$ o $f(x)=(x-2)^2$, que es la representada en (b).

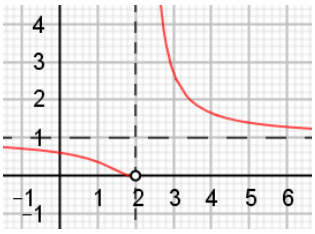
b) La función $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ no es continua en $x = -2$ ni en $x = 2$, pues no está definida en esos puntos. En el punto $x = 2$ la discontinuidad puede evitarse definiendo aparte $f(2)=1/4$, pues

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}=0,25.$$ (Función representada en (a))

En $x = -2$ la discontinuidad no puede evitarse.

c) La función $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$ es continua en todo **R**, que es su dominio: $x^2+4\neq 0$ para todo x.

d) $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ es continua para todo $x \neq 2$, punto en el que no está definida.
Su gráfica es la adjunta.
Es fácil ver que la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.
En efecto: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-2}}=\left[e^{\frac{1}{+\infty}}=e^0\right]=1$; y $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-2}}=\left[e^{\frac{1}{-\infty}}=e^0\right]=1$.
(Más difícil es ver que también tiene una asíntota vertical, la recta $x = 2$).



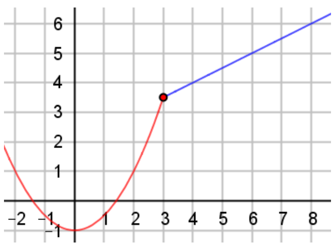
Funciones definidas a trozos
Las funciones definidas a trozos serán continuas si cada función lo es en su intervalo de definición, y si lo son en los puntos de unión de los intervalos; para esto último es necesario que coincidan los límites laterales.

Ejemplo:
a) En la página 134 se dan las gráficas de $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{si } x\le 1\\ x-1, & \text{si } x>1\end{cases}$ y $f(x)=\begin{cases}x^2-3, & \text{si } x<2\\ \dfrac{4}{x}, & \text{si } x\ge 2\end{cases}$.

Puede verse que la primera es continua en todo **R**, pues $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x^2)=\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$.

En cambio, la segunda no es continua en $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-3)=1$ y $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{2}=2$.

b) Si $f(x)=\begin{cases}0,5x^2-1, & \text{si } x\le 3\\ mx+2, & \text{si } x>3\end{cases}$, el valor que debe tomar el parámetro m para que la función sea continua en $x = 3$ es el resultado de la igualdad $\lim\limits_{x\to3^-}(0,5x^2-1)=\lim\limits_{x\to3^+}(mx+2)$.
Como $\lim\limits_{x\to3^-}(0,5x^2-1)=0,5\cdot 9-1=3,5$ y $\lim\limits_{x\to3^+}(mx+2)=3m+2$, debe cumplirse que $3,5=3m+2\Rightarrow 1,5=3m\Rightarrow m=0,5$.



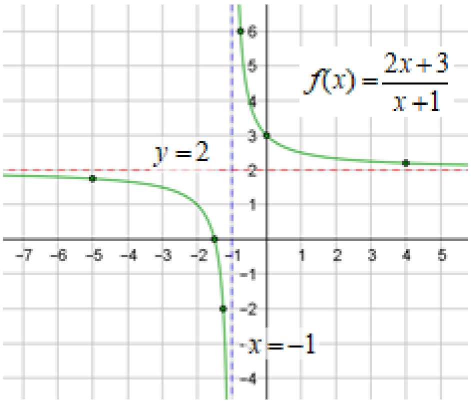
5. Recursos informáticos

Casi todo lo estudiado en los temas de funciones puede reforzarse aplicando los recursos informáticos.
Lo más vistoso y sencillo es la representación gráfica de cualquier función. En estos temas, la mayoría de los dibujos se han hecho con **GeoGebra**, pero puede utilizarse cualquier otro programa conocido: **Mathway**, **Photomath** o **Google**.

Estudio de una función

Por ejemplo, si se quiere estudiar la función $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$ puede hacerse lo siguiente:

1. Abriendo GeoGebra y tecleando (2x+3)/(x+1) se obtiene la gráfica adjunta. (La escala de los ejes, el grosor, estilo de trazo y color de la curva puede modificarse: ir a "propiedades").
Puede observarse que presenta una discontinuidad y que siempre es decreciente.



2. Por la izquierda de –1 la curva se pierde hacia –∞; y por la derecha, aparece por arriba. Esto indica la existencia de una asíntota vertical. Efectivamente, como el denominador se anula en $x = -1$, en ese punto la función se va al infinito. La asíntota es la recta de ecuación $x = -1$. (Se dibuja tecleando x = –1 → línea azul).
3. También se observa que, para valores grandes de x, la curva se acerca cada vez más a la recta $y = 2$, que es su asíntota horizontal (línea roja).
4. Pueden marcarse algunos puntos:
   (0, 3); (4, 11/5); (–0,75, 6); (–3/2, 0); (–1,25, –2); (–5, 1,75)…

Calculando el valor de un límite

→ Para la función de arriba, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$, pueden confirmarse sus asíntotas. Se hace como sigue:

Por la izquierda de –1, $x\to -1^-$: hay que teclear $\text{LímiteIzquierda}\left(\dfrac{2x+3}{x+1},-1\right)$; sale –∞.

Por la derecha de –1, $x\to -1^+$: hay que teclear $\text{LímiteDerecha}\left(\dfrac{2x+3}{x+1},-1\right)$; sale ∞.

Estos resultados indican que $x = -1$ es asíntota vertical.

Si se teclea $\text{Límite}\left(\dfrac{2x+3}{x+1},\text{inf}\right)$ se obtiene 2 ⇒ la recta $y = 2$ es su asíntota horizontal.

→ Para calcular $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}$, se teclea: $\text{Límite}\left(\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6},1\right)$ → aparece 0.4286.

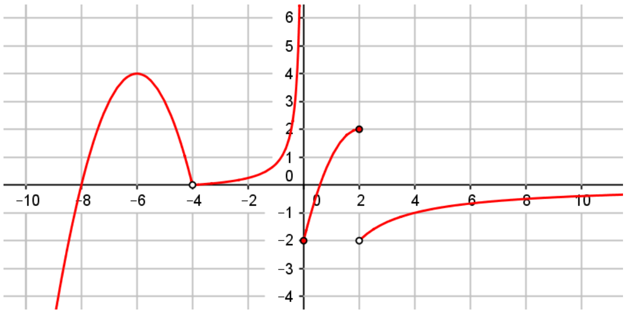
El resultado que se obtiene aplicando los métodos vistos en este tema es $\dfrac{3}{7}$. (Ver el problema 6). La aparente disparidad de resultados, que no es tal, pues 3/7 = 0,42857…, solo puede entenderse si se conoce el significado del límite; por eso hay que utilizar los recursos informáticos con sumo cuidado: hay que conocer lo que se está haciendo y hay que saber interpretar los resultados.

→ La aplicación **Photomath** es mucho más rápida.

En este caso, abriendo la aplicación y fotografiando la expresión $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}}$ aparece $\dfrac{3}{7}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La gráfica de la función $f(x)$ es la adjunta.
Determina, justificando brevemente la respuesta, los siguientes límites:



a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$;

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

¿En qué puntos es discontinua? ¿Es evitable la discontinuidad en alguno de esos puntos?
¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, indícalas.

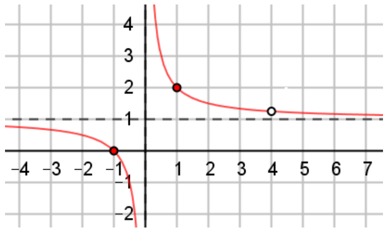
2. Halla, por sustitución (si se puede), el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(4x^2-7x+2\right)$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-3x+2}{2x^2+3x+1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x+2}{2x^2+3x+1}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1}{x^2-1}$.

3. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to -1} e^{2x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\log\dfrac{20}{3x-1}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\cos\left(2x+\pi\right)\right)$.

4. a) Halla el límite de $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}$ en los puntos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x = 4$. ¿A cuánto tiende la función cuando $x \to \pm\infty$?
Confirma tus resultados sabiendo que su gráfica es la adjunta.
b) Indica los puntos de discontinuidad de la función. Si alguna de sus discontinuidades es evitable, ¿cómo se evitaría?



5. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$. Halla, justificando el resultado, el valor del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0, 1, –4, ∞. ¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, da su ecuación o ecuaciones.

6. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x-20}{x^2-5x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$.

(Una vez resuelto el problema, comprueba tus resultados utilizando recursos informáticos).

7. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^{x/2}}{1+x}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.
(Si dispones de alguna aplicación informática haz la gráfica de la función y confirma tus resultados).

Google

8. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}$; b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; d) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{2x-4}$.

9. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$; d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$.

(Comprueba tus resultados utilizando recursos informáticos).

10. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$; c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$.

11. Halla los puntos en los que no son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$; b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x}$; c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x-15}$.

12. Aplicando límites laterales comprueba si son continuas o no las siguientes funciones definidas a trozos.

a) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2x, & \text{si } x>2\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\ge 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}-2x+2, & \text{si } x<0\\ e^{-x}, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$.

13. Estudia mediante límites la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x<-2\\ x^2+2x+1 & -2\le x<1\\ -x^2+2 & x\ge 1\end{cases}$.

Justifica el resultado gráficamente.

14. Para qué valor de *a* es continua cada una de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}a-x & \text{si } x<4\\ x^2-16 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2+x-3, & \text{si } x\le 1\\ x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$.

15. El precio (en cientos de euros) de un nuevo modelo de teléfono móvil viene determinado por la función $P(t)=\dfrac{7+2t^2}{(t+2)^2}$, donde *t* mide el número de meses transcurridos desde su lanzamiento al mercado.

a) ¿Cuál fue su precio inicial? Comprueba que su precio baja en los dos primeros meses. ¿A cuánto tiende al cabo de 10 meses?

b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué precio tiende?

16. Supongamos que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $f(x)=\begin{cases}ax-x^2, & \text{si } 0\le x\le 6\\ 2x, & \text{si } 6<x\le 10\end{cases}$, siendo *x* el tiempo transcurrido en años.

a) Halla el valor del parámetro *a* para que $f(x)$ sea una función continua.

b) Para *a* = 8 representa su gráfica e indica en qué períodos de tiempo los beneficios crecen o decrecen.