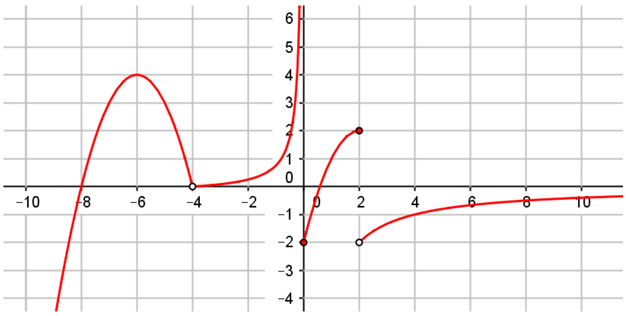
SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La gráfica de la función $f(x)$ es la adjunta. Determina, justificando brevemente la respuesta, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -4} f(x)$; b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$;

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\lim_{x\to 2} f(x)$;

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; f) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.



¿En qué puntos es discontinua? ¿Es evitable la discontinuidad en alguno de esos puntos?
¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, indícalas.

Solución:

a) $\lim_{x\to -4} f(x) = 0$. Aunque la función no está definida en $x = –4$, el valor de la función se acerca a 0 por ambos lados: por la izquierda y por la derecha.

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. Cuando $x \to 0^-$, la función toma valores cada vez mayores.

c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -2$.

Es obvio que en $x = 0$ la función no tiene límite: los límites laterales deben existir y ser iguales.

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe (no coinciden los límites laterales): $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) = -2$.

e) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$. La función toma cada vez valores más grandes y negativos.

f) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$. La función se acerca cada vez más al eje OX.

- La función es discontinua en los puntos $x = –4$, $x = 0$ y $x = 2$.

En $x = –4$, por no estar definida; en $x = 0$ y en $x = 2$, por no existir límite.
La discontinuidad puede evitarse en $x = –4$, definiendo $f(-4) = 0$.

- La función tiene una asíntota vertical en $x = 0$: a la izquierda de $x = 0$, cuando $x \to 0^-$, la curva se va al infinito, pegándose cada vez a la recta.

También tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 0$: cuando $x \to +\infty$, la curva se acerca cada vez a la recta.

2. Halla, por sustitución (si se puede), el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3}\left(4x^2 - 7x + 2\right)$; b) $\lim_{x\to -1}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1}$; c) $\lim_{x\to 0}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1}$; d) $\lim_{x\to 2}\frac{4x+1}{x^2-1}$.

Solución:

Sustituyendo se obtiene:

a) $\lim_{x\to -3}\left(4x^2 - 7x + 2\right) = 4\cdot(-3)^2 - 7\cdot(-3) + 2 = 36 + 21 + 2 = 59$.

b) $\lim_{x\to -1}\frac{-3x+2}{2x^2+3x+1} = \frac{-3\cdot(-1)+2}{2\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+1} = \frac{5}{0} = \pm\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x+2}{2x^2+3x+1}=\dfrac{2}{1}=1$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1}{x^2-1}=\dfrac{4\cdot 2+1}{2^2-1}=\dfrac{9}{3}=3$.

3. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to -1} e^{2x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\log\dfrac{20}{3x-1}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\cos\left(2x+\pi\right)\right)$.

<u>Solución</u>:

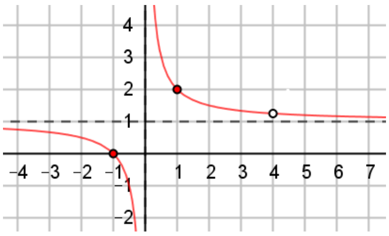
a) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\cdot 6-3}=\sqrt{9}=3$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} e^{2x+2}=e^{2\cdot(-1)+2}=e^0=1$.

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\log\dfrac{20}{3x-1}\right)=\log\dfrac{20}{3\cdot 1-1}=\log 10=1$.

d) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\cos\left(2x+\pi\right)\right)=\cos\left(2\pi+\pi\right)=\cos\left(3\pi\right)=-1$.

4. a) Halla el límite de $f(x)=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}$ en los puntos $x=-1$, $x=0$, $x=1$ y $x=4$. ¿A cuánto tiende la función cuando $x\to \pm\infty$?
Confirma tus resultados sabiendo que su gráfica es la adjunta.
b) Indica los puntos de discontinuidad de la función. Si alguna de sus discontinuidades es evitable cómo se evitaría.



<u>Solución</u>:

a) Como es una función racional pueden presentarse dificultades cuando el denominador se hace 0.

- Si $x\to -1$: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\dfrac{1+3-4}{1+4}=\dfrac{0}{5}=0$.

Gráficamente se ve que cuando $x\to -1$, la función se acerca a 0.

- Si $x\to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\dfrac{-4}{0}=\pm\infty$.

Como se observa en a gráfica, la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

- Si $x\to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\dfrac{1-3-4}{1-4}=\dfrac{-6}{-3}=2$. Efectivamente, en la gráfica se ve que $f(1)=2$.

- Si $x\to 4$: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\left[\dfrac{16-12-4}{16-16}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\left(x-4\right)\left(x+1\right)}{x\left(x-4\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{5}{4}$.

Aunque la función no está definida en $x = 4$, gráficamente se ve que por ambos lados se acerca a 5/4.

- Si $x\to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. (La recta $y = 1$ es asíntota horizontal).

b) La función es discontinua en los `ceros´ del denominador: $x = 0$ y $x = 4$.

La discontinuidad puede evitarse en $x = 4$, pues existe el límite; se evitaría definiendo $f(4)=\frac{5}{4}$.

5. Sea $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}$. Halla, justificando el resultado, el valor del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 0, 1, –4. ∞. ¿Tiene la función alguna asíntota? Si es así, da su ecuación o ecuaciones.

Solución:

Sustituyendo en cada caso:

- Si $x\to 0$: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\dfrac{0-16}{0+0-4}=4$.

- Si $x\to 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\dfrac{1-16}{1+3-4}=\dfrac{-15}{0}=\pm\infty$.

Como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty \Rightarrow$ la función tiene una asíntota vertical: la recta $x = 1$.

- Si $x\to -4$: $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{-8}{-5}=\dfrac{8}{5}$.

- Si $x\to\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-16}{x^2+3x-4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}(1)=1$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1 \Rightarrow$ la función tiene una asíntota horizontal: la recta $y = 1$.

6. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x-20}{x^2-5x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}$.

Una vez resuelto el problema, comprueba tus resultados utilizando recursos informáticos.

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6}=\dfrac{3-3}{1+5-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to$ descomponiendo en factores: $\begin{cases} 3x-3=3(x-1) \\ x^2+5x-6=(x-1)(x+6)\end{cases}\to$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+6)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{x+6}=\dfrac{3}{7}$.

Aplicando **GeoGebra**: teclear $\text{Límite}\left(\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6},1\right)\to$ aparece 0.4286. Observa que $\dfrac{3}{7}=0,428571$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{-8+6+2}{4-6+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+1)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}=\dfrac{9}{-1}=-9$.

La igualdad descomposición $x^3-3x+2=(x+2)(x^2-2x+1)$ se obtiene dividiendo por Ruffini.

Lo mismo puede hacerse con el denominador: $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$.

Aplicando **GeoGebra**: teclear $\text{Límite}\left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2},-2\right)\to$ aparece –9.

c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x-20}{x^2-5x}=\dfrac{20-20}{25-25}=\left[\dfrac{0}{0}\right]\to$ (Sacando factor común) $=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4\cancel{(x-5)}}{x\cancel{(x-5)}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4}{x}=\dfrac{4}{5}$.

Aplicando **GeoGebra**: Límite$\left(\dfrac{4x-20}{x^2-5x},5\right)\to$ aparece 0.8.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}=\dfrac{3-4+1}{1-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(3x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{x+1}=\dfrac{2}{2}=1$.

Aplicando **GeoGebra**: Límite$\left(\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1},1\right)\to$ aparece 1.

Esto es lo que se observa en GeoGebra.

$a = \text{Límite}\left(\dfrac{3x-3}{x^2+5x-6},1\right)$ $\to 0.43$

$b = \text{Límite}\left(\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+3x+2},-2\right)$ $\to -9$

$c = \text{Límite}\left(\dfrac{4x-20}{x^2-5x},5\right)$ $\to 0.8$

$d = \text{Límite}\left(\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1},1\right)$ $\to 1$

7. Dada la función $f(x)=\dfrac{e^{x/2}}{1+x}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

¿Podría asegurarse que la función tiene alguna asíntota? Si la respuesta es afirmativa indica su ecuación o ecuaciones.
(Si dispones de alguna aplicación informática haz la gráfica de la función y confirma tus resultados).

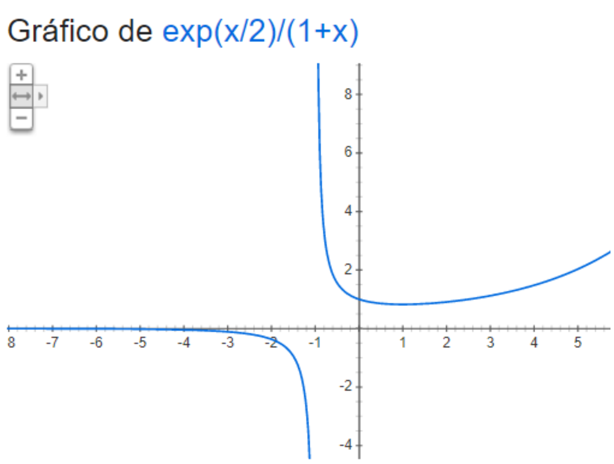
Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^0}{1}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^{-1/2}}{0}=\pm\infty\Rightarrow$ La recta $x=-1$ es asíntota vertical.

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^{-\infty}}{-\infty}=\dfrac{0}{-\infty}=0\Rightarrow$ La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=\dfrac{e^{+\infty}}{+\infty}=+\infty$. $\to$ Aunque a este nivel no se tienen instrumentos para afirmar que este límite es $+\infty$, con la calculadora se puede ver fácilmente: basta con dar a x un valor grande. Por ejemplo, si $x = 100$, $f(100)=\dfrac{e^{50}}{101}=5,13\cdot 10^{19}$.



Tecleando exp(x/2)/(1+x) se obtiene la gráfica adjunta.
En $x = 1$ se observa que la curva se rompe: por la izquierda se va hacia $-\infty$; por la derecha, hacia $+\infty$.
También se aprecia que cuando $x\to-\infty$, la curva se pega al eje OX: $y = 0$ es asíntota horizontal.
Por la derecha, cuando $x\to+\infty$, la función toma cada vez valores más grandes: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x/2}}{1+x}=+\infty$.

8. Halla, justificando el resultado, el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-x}{2x-4}$.

<u>Solución</u>:

Si apareciese la indeterminación 0/0 (y así va a suceder) habrá que multiplicar y dividir cada función por la expresión conjugada del término que lleva raíz, ya que el producto de las expresiones conjugadas permite eliminar la raíz cuadrada: $\left(\sqrt{A}+B\right)\left(\sqrt{A}-B\right)=A-B^2$.

El producto del otro término no suele convenir hacerlo; así, en el límite que sigue, el producto del numerador, $(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)$ no se realiza, lo que facilita la simplificación posterior.

a) $$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}=\left[\frac{-1+1}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{5+x-4}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(\cancel{x+1})\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{\cancel{x+1}}=\lim_{x\to -1}\left(\sqrt{5+x}+2\right)=\sqrt{4}+2=4.$$

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\left[\frac{\sqrt{4}-2}{2-2}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\cancel{x-1})\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{1}+1=2.$$

d) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-x}{2x-4}=\left[\frac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-x\right)\left(\sqrt{x+2}+x\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x+2-x^2\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{-(\cancel{x-2})(x+1)}{2(\cancel{x-2})\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x-1}{2\left(\sqrt{x+2}+x\right)}=\frac{-3}{2\cdot 4}=-\frac{3}{8}.$$

$\to$ La expresión $x+2-x^2=-\left(x^2-x-2\right)$, siendo su descomposición factorial la que se indica en el numerador.

9. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$; c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$; d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$.

(Comprueba tus resultados utilizando recursos informáticos).

<u>Solución</u>:

Recuerda:

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, entonces la recta $x = a$ es una <u>asíntota vertical</u> de la curva $y=f(x)$.

(Las funciones racionales *pueden* tener asíntotas en los puntos que anulan el denominador).

- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l$ se concluye que la recta $y = l$ es una <u>asíntota horizontal</u> de $f(x)$.

(Las funciones racionales tienen asíntotas horizontales cuando el grado del denominador es igual o mayor que el grado del numerador).

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$ $\to$ Dom (f) = **R** – $\{3\}$. En $x = 3$ tiene una asíntota vertical.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{6}{3-3}=\dfrac{6}{0}=\pm\infty$. La asíntota es la recta $x = 3$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}2=2$.

La asíntota es la recta $y = 2$.

b) $f(x)=\dfrac{1-3x}{x-2}$ $\to$ Dom (f) = **R** – $\{2\}$. En $x = 2$ tiene una asíntota vertical.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-3x}{x-2}=\dfrac{1-6}{2-3}=\dfrac{-5}{0}=\pm\infty$. La asíntota es la recta $x = 2$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-3x}{x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(-3)=-3$.

La asíntota es la recta $y = -3$.

c) $f(x)=\dfrac{2x-4}{x+3}$ $\to$ Dom (f) = **R** – $\{-3\}$. En $x = -3$ tiene una asíntota vertical.

En efecto: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x-4}{x+3}=\dfrac{-6-4}{-3+3}=\dfrac{-10}{0}=\pm\infty$. La asíntota es la recta $x = -3$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-4}{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}2=2$.

La asíntota es la recta $y = 2$.

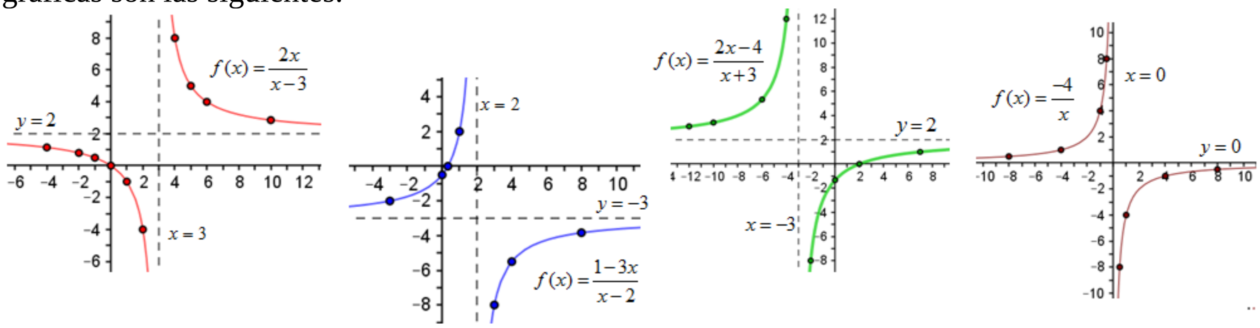
d) $f(x)=\dfrac{-4}{x}$ $\to$ Dom (f) = **R** – $\{0\}$. En $x = 0$ tiene una asíntota vertical.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4}{x}=\dfrac{-4}{0}=\pm\infty$. La asíntota es la recta $x = 3$.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4}{x}=\dfrac{-4}{\infty}=0$.

La asíntota es la recta $y = 0$.

<u>Nota</u>: Estas funciones se estudiaron en el problema 17 del tema 8. Cuando hayas determinado las asíntotas, comprueba tus resultados con los que allí se dieron. Sus gráficas son las siguientes.



10. Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales:

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$; c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$.

<u>Solución</u>:
En el problema anterior se recordó el criterio para hallar las asíntotas de una función racional.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-9}$ → Dom (f) = **R** – {–3, 3}. Hay que hacer el límite en esos puntos para determinar si hay asíntotas verticales.

En $x = -3$: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x}{x^2-9}=\dfrac{-6}{9-9}=\dfrac{-6}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = -3$ es asíntota vertical.

En $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x^2-9}=\dfrac{6}{9-9}=\dfrac{6}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 3$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\dfrac{2}{\infty}=0$.

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}$ → Dom (f) = **R** – {1, 2}. Hay que hacer el límite en esos puntos para determinar si hay asíntotas verticales.

En $x = 1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{1+1}{(-1)\cdot 0}=\dfrac{2}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=\dfrac{4+1}{0\cdot 1}=\dfrac{5}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1=1 \Rightarrow \text{La asíntota es la recta } y = 1.$$

c) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ → Como $x^2+3x+2=0$ si $x = -2$ o $x = -1 \Rightarrow$ Dom (f) = **R** – {–2, –1}. Hay que hacer el límite en esos puntos para determinar si hay asíntotas verticales.

En $x = -2$: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}=\left[\dfrac{-2+2}{4-6+2}=\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{(x+2)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{1}{(x+1)}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

Como existe límite (no vale ∞), en este punto no hay asíntota vertical. (Se trata de una discontinuidad evitable).

En $x = -1$: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}=\dfrac{-1+2}{1-3+2}=\dfrac{1}{0}=\pm\infty \Rightarrow$ la recta $x = -1$ es asíntota vertical.

- También tiene una asíntota horizontal, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow \text{La asíntota es la recta } y = 0.$$

11. Halla los puntos en los que no son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$; b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x}$; c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$; d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x-15}$.

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$ no es continua en x = 1, pues no está definida en ese punto. En los demás puntos sí es continua.

b) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+3x}$ no es continua en los puntos en los que no está definida, que son las soluciones de $x^2+3x=0 \Rightarrow x = 0$ y $x = -3$. Por tanto, es continua en **R** − {−3, 0}.

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ está definida siempre: el denominador no se anula en ningún punto. Por tanto, es continua siempre.

d) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-2x-15}$ no es continua en los puntos en los que no está definida, que son las soluciones de $x^2-2x-15=0 \Rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-15)}}{2\cdot1}=\dfrac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\dfrac{2\pm8}{2}=\begin{cases}5\\-3\end{cases}$.

Por tanto, es continua en **R** − {−3, 5}.

12. Aplicando límites laterales comprueba si son continuas o no las siguientes funciones definidas a trozos.

a) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2x, & \text{si } x>2\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\ge 1\end{cases}$; c) $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{si } x<0\\ e^{-x}, & \text{si } x\ge 0\end{cases}$.

Solución:

a) $f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{si } x\le 2\\ x^2-2x, & \text{si } x>2\end{cases}$.

Por separado, cada una de las funciones es continua en su intervalo de definición (la primera función es una recta; la segunda, una parábola). Habrá que ver si también es continua en el punto x = 2, el de unión/separación; para ello los límites laterales deben valer lo mismo, y ser iguales a $f(2)=2-2=0$.

Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2-x)=2-2=0 \text{ y } \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-2x)=2^2-2\cdot2=0,$$

se deduce que la función también es continua en ese punto.

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{si } x<1\\ \ln x, & \text{si } x\ge 1\end{cases}$. El único punto que presenta dudas es x = 1. Será continua en ese punto si los límites laterales son iguales a $f(1)=\ln 1=0$.

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2-1)=1-1=0$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(\ln x)=\ln 1=0$ son iguales, se deduce que la función también es continua en ese punto.

c) $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{si } x<0\\ e^{-x}, & \text{si } x\geq 0\end{cases}$. El único punto dudoso es x = 0. Será continua si los límites laterales son iguales a $f(0)=e^0=1$.

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-2x+1)=0+1=1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{-x}=e^0=0$ son distintos, se deduce que la función no es continua en ese punto.

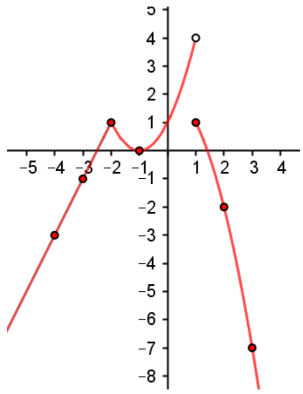
13. Estudia mediante límites la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}2x+5 & x<-2\\ x^2+2x+1 & -2\leq x<1\\ -x^2+2 & x\geq 1\end{cases}$.

Justifica el resultado gráficamente.

<u>Solución</u>:

La función dada está definida mediante tres funciones continuas. Por tanto, los únicos puntos dudosos son x = –2 y x = 1. En esos puntos, la continuidad exige que exista límite (los límites laterales deben ser iguales).

- En x = –2:
  $\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(2x+5)=1$; $\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(x^2+2x+1)=1 \Rightarrow$ es continua.
- En x = 1:
  $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+2x+1)=4$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x^2+2)=1 \Rightarrow$ no es continua.



Como se trata de una función lineal y de dos parábolas, pueden dibujarse dando valores.

Puntos de $f(x)=2x+5 \to$ (–4, –3) y (–3, –1).

Puntos de $f(x)=x^2+2x+1 \to$ (–2, 1), (–1, 0) y (1^-, 4^-).

Puntos de $f(x)=-x^2+2 \to$ (1, 1), (2, –2) y (3, –7).

Como puede verse, la función es continua en x = –2; no lo es en x = 1.

14. Para qué valor de a es continua cada una de las funciones:

a) $f(x)=\begin{cases}a-x & \text{si } x<4\\ x^2-16 & \text{si } x\geq 4\end{cases}$; b) $f(x)=\begin{cases}x^2+x-3, & \text{si } x\leq 1\\ x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$.

<u>Solución</u>:

a) Por separado, cada una de las funciones dadas es continua en su dominio de definición.

La única duda se presenta en x = 4. Será continua si los límites laterales coinciden con su valor de definición, que es $f(4)=4^2-16=0$.

Por la izquierda: $\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(a-x)=a-4$.

Por la derecha: $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(x^2-16)=16-16=0$.

Será continua si $a-4=0 \Rightarrow a$ = 4.

b) Para que la función $f(x)=\begin{cases}x^2+x-3, & \text{si } x\leq 1\\ x+a, & \text{si } x>1\end{cases}$ sea continua en x = 1, que es el único dudoso, deben coincidir los límites laterales con su valor de definición.

Como

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x-3)=1+1-3=-1; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+a)=1+a,$$

debe cumplirse que $-1=1+a \Rightarrow a=-2$.

15. El precio (en cientos de euros) de un nuevo modelo de teléfono móvil viene determinado por la función $P(t)=\dfrac{7+2t^2}{(t+2)^2}$, donde t mide el número de meses transcurridos desde su lanzamiento al mercado.
a) ¿Cuál fue su precio inicial? Comprueba que su precio baja en los dos primeros meses. ¿A cuánto tiende al cabo de 10 meses?
b) Con el paso del tiempo, ¿hacia qué precio tiende?
Solución:
a) En el momento inicial, $t = 0$: $P(0)=\dfrac{7+0^2}{(0+2)^2}=1,75$ cientos de euros = 175 €.

Para $t = 1$ y $t = 2$: $P(1)=\dfrac{7+2\cdot 1^2}{(1+2)^2}=\dfrac{9}{9}=1 \to$ 100 €; $P(2)=\dfrac{7+2\cdot 2^2}{(2+2)^2}=\dfrac{15}{16}=0,9375 \to 93,75$ €

Cuando $t \to 10$, $\lim\limits_{t\to 10}\dfrac{7+2t^2}{(t+2)^2}=\dfrac{7+200}{12^2}\approx 1,4375 \to 143,75$ €.

b) Con el paso del tiempo (a largo plazo; cuando $t \to \infty$) el precio tenderá a 200 €, pues:

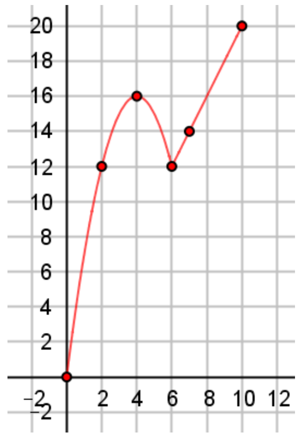
$$\lim_{t\to\infty}\left(P(t)\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{7+2t^2}{(t+2)^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{7+2t^2}{t^2+4t+4}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{t^2}=2.$$

16. Supongamos que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $f(x)=\begin{cases} ax-x^2, & \text{si } 0\le x\le 6 \\ 2x, & \text{si } 6<x\le 10 \end{cases}$, siendo x el tiempo transcurrido en años.
a) Halla el valor del parámetro a para que $f(x)$ sea una función continua.
b) Para $a = 8$ representa su gráfica e indica en qué períodos de tiempo los beneficios crecen o decrecen.
Solución:
a) Para que la funció sea continua es necesario que en el punto $x = 6$, único que presenta dudas, coincidan los límites laterales.

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\left(ax-x^2\right)=6a-36\,;\quad \lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^-}\left(2x\right)=12$$

Será continua cuando $6a-36=12 \Rightarrow 6a=48 \Rightarrow a=8$.

b) Si $a = 8$, $f(x)=\begin{cases} 8x-x^2, & \text{si } 0\le x\le 6 \\ 2x, & \text{si } 6<x\le 10 \end{cases}$.



Puede representarse dando valores.
- Intervalo [0, 6], $f(x)=8x-x^2$, Es uva parábola.

Puntos: (0, 0); (2, 12); (4, 16), vértice; (6, 12).
- Intervalo (6, 10], $f(x)=2x$.

Puntos: (7, 14); (10, 20).
Los beneficios crecen los cuatro primeros años y los 4 últimos; decrecen en el periodo (4, 6): años 5º y 6º.