SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Al extraer una carta de una baraja de 40 cartas calcula la probabilidad de que sea
a) Un rey. b) El rey de copas. c) No sea una figura.
Solución:
a) Entre las 40 cartas hay 4 reyes ⇒ P(Rey) = 4/40.

b) P(Rey de copas) = 1/40.

c) Las figuras de la baraja son 12: 4 sotas, 4 caballos y 4 reyes. Las 28 cartas restantes no son figuras. Por tanto,
P(No figura) = 28/40.

2. Si se consideran familias con tres hijos, ¿cuál es la probabilidad de que una de esas familias, elegida al azar, tenga al menos una niña?
Solución:
El espacio muestral tiene 8 sucesos elementales:
{HHH, HHM, HMH, MHH, HMM, MHM, MMH, MMM}, siendo H = hombre y M = mujer.
La probabilidad de que los tres hijos serán varones es: $P(HHH)=\frac{1}{8}$.
Como tener al menos una niña es el suceso contrario de que los tres sean varones, se tendrá:
P(al menos una niña) = $1-P(HHH)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$.

3. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dado (con las caras numeradas del 1 al 6) se obtenga:
a) Al menos un as: {1}. b) Dos ases. c) Dos números distintos
Solución:
Espacio muestral:
E = {(1, 1)..., (1, 6), (2,1)…, (2,6)…, (6,1)…, (6,6)} → 36 sucesos elementales.

a) Los sucesos favorables son 11: {(1, 1)..., (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6,1)}.
Luego, P(al menos un as) = $\frac{11}{36}$.

b) P(2 ases) = $\frac{1}{36}$ → es el suceso (1, 1).

c) Es el suceso contrario de "dos números iguales" = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}.
P(dos números distintos) = 1 – P(dos números iguales) = $1-\frac{6}{36}=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

4. En un juego se sortea cada día un premio utilizando papeletas numeradas del 000 al 999.
a) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 5.
b) Calcula la probabilidad de que el número premiado termine en 55.
c) Sabiendo que ayer salió premiado un número terminado en 5, calcula la probabilidad de que el número premiado hoy termine también en 5.
Solución:
En total hay 1000 papeletas, cuyos números son 000, 001, 002, …, 005, …, 055, …, 998, 999.

a) Uno de cada 10 números termina en 5. Por tanto, *P*(termine en 5) = $\frac{1}{10}$.

b) Uno de cada 100 números termina en 55. Por tanto, *P*(termine en 55) = $\frac{1}{100}$.

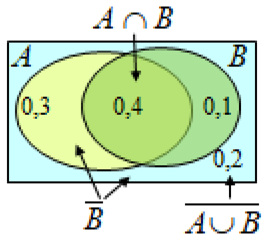
c) Cada día el experimento es independiente, pues la probabilidad de una terminación no se ve condicionada por las terminaciones de otros días. En consecuencia,

P(termine hoy en 5/ayer terminó en 5) = $\frac{1}{10}$.

5. Las probabilidades de los sucesos *A*, *B* y $A \cap B$ son, respectivamente, *P*(*A*) = 0,7, *P*(*B*) = 0,5, $P(A \cap B) = 0,4$. Calcula:

a) $P(A \cup B)$ b) $P(\overline{A})$ y $P(\overline{B})$; c) La probabilidad de que no se cumpla ni *A* ni *B*.

<u>Solución</u>:
Se puede confeccionar el diagrama de Venn adjunto. Con esto:



a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ = 0,7 + 0,5 – 0,4 = 0,8.

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ = 1 – 0,7 = 0,3; $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$ = 1 – 0,5 = 0,5.

c) Es el suceso $\overline{A \cup B}$: $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$ = 1 – 0,8 = 0,2.

6. Se tienen dos sucesos aleatorios *A* y *B* y se conocen las probabilidades: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$ y $P(A \cup B) = 0,7$.

a) ¿Son los sucesos *A* y *B* incompatibles? Razona la respuesta.
b) ¿Son sucesos independientes? Razona la respuesta.

<u>Solución</u>:
a) Dos sucesos *A* y *B* son incompatibles cuando $P(A \cap B) = 0$.

Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

En este caso:

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,7 = 0,2 \neq 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ no son incompatibles.}$$

b) Dos sucesos *A* y *B* son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Como

$$P(A \cap B) = 0,2 \text{ y } P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,5 = 0,2 \Rightarrow \text{los sucesos son independientes.}$$

7. Calcula la probabilidad $P(A \cup B)$ sabiendo que *P*(*A*) = 0,3, *P*(*B*) = 0,5 y *P*(*A*/*B*) = 0,2.

<u>Solución</u>:

Como $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,2 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1$.

Por otra parte, de:

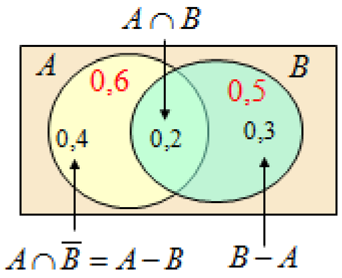
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0,3 + 0,5 - 0,1 = 0,7.$$

8. Sean A y B dos sucesos tales que $P\left(A\cup B\right)=0,9$, $P\left(A\cap B\right)=0,2$ y $P\left(\overline{A}\right)=0,4$, donde $\overline{A}$ es el suceso contrario de A. Calcula las siguientes probabilidades:

$$P\left(B\right),\quad P\left(A/B\right),\quad P\left(A\cap\overline{B}\right),\quad P\left(\overline{A\cap B}\right),\quad P\left(\overline{A\cup B}\right).$$

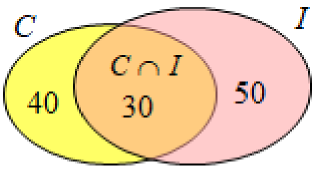
Solución:
Si $P\left(\overline{A}\right)=0,4 \Rightarrow P\left(A\right)=0,6$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos:



- $P\left(A\cup B\right)=P(A)+P(B)-P\left(A\cap B\right) \Rightarrow$ (teniendo en cuenta los datos)
  $0,9=0,6+P(B)-0,2 \Rightarrow P\left(B\right)=0,5$.
- $P\left(A/B\right)=\dfrac{P\left(A\cap B\right)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,5}=0,4$.
- $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)$ = 0,6 – 0,2 = 0,4.
- $P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P\left(A\cap B\right)$ = 1 – 0,2 = 0,8.
- $P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)$ = 1 – 0,9 = 0,1.

9. A un congreso asisten 120 personas, de las que 70 hablan castellano, otro conjunto inglés y 30 ambos idiomas. Si se escogen 2 personas al azar, ¿qué probabilidad hay de que se entiendan sin traductor?
Solución:
De las 120 personas, el suceso C, hablar castellano, está formado por 70 ellas; como 30 hablan ambos idiomas, suceso $C\cap I$, habrá 40 que solo hablen castellano. Por lo tanto, las 80 personas restantes (120 – 40 = 80) hablarán inglés. Y solo hablarán inglés, 80 – 30 = 50.
En el diagrama adjunto se indica la situación.



Dos de esas 120 personas pueden elegirse de 120 · 119 maneras distintas. (Podrían considerarse combinaciones de 120 tomadas 2 a 2, pero es más eficaz distinguir el orden y considerar variaciones, siempre que se haga lo mismo con los casos favorables).

Dos personas se entienden sin traductor en las siguientes circunstancias:
→ cada una de las 40 que hablan solo castellano con las otras 69 que hablan castellano: hay 40 · 69 casos favorables;
→ cada una de las 50 que hablan solo inglés con las otras 79 que hablan inglés: hay 50 · 79 casos favorables;
→ cada una de las 30 que hablan ambos idiomas con las otras 119 restantes: hay 30 · 119 casos favorables.
El total de casos favorables a entenderse es:
40 · 69 + 50 · 79 + 30 · 119 = 10280.
Luego, la probabilidad de que dos personas se entiendan será:

$$P\left(2\text{ se entienden}\right)=\frac{10280}{120\cdot 119}=\frac{257}{357}.$$

De otra manera, usando el suceso contrario:

→ Dos personas no se entienden sin traductor si la primera es de las 40 que habla solo castellano y la segunda es de las 50 que solo habla inglés: hay 40 · 50 casos favorables; o bien, la primera solo habla inglés y la segunda solo castellano: hay 50 · 40 casos favorables.

$$P(2 \text{ no se entienden}) = \frac{40\cdot 50}{120\cdot 119} + \frac{50\cdot 40}{120\cdot 119} = \frac{100}{357}.$$

Luego, la probabilidad de que dos personas se entiendan será:

$$P(2 \text{ se entienden}) = 1 - P(2 \text{ no se entienden}) = 1 - \frac{100}{357} = \frac{257}{357}.$$

10. En un IES, los alumnos se clasifican según su sexo y práctica de la natación, según muestra la siguiente tabla:

	Nadador	No nadador	TOTAL
Hombre	189	301	490
Mujer	165	335	500
TOTAL	354	636	990

A la vista de estos datos, calcula la probabilidad de que elegido un alumno/a al azar:
a) Sea no nadador.
b) Sea mujer y no nadadora.
c) Sea nadadora sabiendo que es mujer.
d) Sea hombre si el alumno elegido no practica natación.
Solución:
Por la regla de Laplace, y atendiendo a los datos dados en la tabla:
a) *P*("no nadador") = 636/990 → hay 636 no nadadores de un total de 990.

b) *P*("mujer y no nadadora") = 335/990 → del total de 990 hay 335 mujeres no nadadoras.

c) *P*("nadadora"/"ser mujer") = $\dfrac{\text{ser mujer nadadora}}{\text{ser mujer}} = \dfrac{165}{500}$.

d) *P*("hombre"/"no nadador") = $\dfrac{\text{hombre no nadador}}{\text{no nadador}} = \dfrac{301}{636}$.

11. Se lanzan dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Halla la probabilidad de que:
a) Su suma sea 4 o 5.
b) Uno a de los resultados sea par y el otro impar.
c) Uno de los resultados sea par sabiendo que la suma de los dos es 7.
d) Uno de los resultados sea 4 sabiendo que la suma de los dos es mayor que 7.
Solución:
El espacio muestral es el indicado en el problema 3: hay 36 resultados posibles; su suma varía desde 2 a 12.
También puede verse la tabla adjunta, en la que se da la suma de los resultados.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

a) Hay 3 resultados en los que las suma es 4: ((1, 3), (2, 2), (3, 1).
Hay 4 resultados con suma 5: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1).

Por tanto, $P(\text{suma 4 o 5}) = \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{7}{36}$.

b) Si uno de los resultados es par y el otro impar, su suma siempre será un número impar. hay 18 resultados con suma impar; por tanto, $P(\text{par e impar}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

De otra manera:

P(par e impar) = P(1er dado par y 2º impar) + P(1º impar y 2º par) = $= \frac{9}{36}+\frac{9}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$.

c) P(par/suma 7) = 1, ya que para sumar 7 un dado debe ser de puntuación par.
Los sucesos de suma 7 son: (1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1). En todos hay un resultado par.

d) Hay 15 sucesos en los que la suma es mayor que 7: (2, 6); (3, 5) y (3, 6); (**4**, **4**), (**4**, 5) y (**4**, 6); (5, 3), (5, **4**), (5, 5) y (5, 6); (6, 2), (6, 3), (6, **4**), (6, 5) y (6, 6). En 5 de esos casos ha salido un 4.
Por tanto:

P(de 4 si la suma es mayor que 7) = $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

12. Pedro y Pablo idean el siguiente juego: cada uno lanza un dado, si la suma de los dados es mayor que 7, gana Pedro; si la diferencia de ambos es menor que 2, gana Pablo; y en cualquier otro caso hay empate. ¿Es un juego equitativo?
Solución:
En las tablas siguientes se indican los casos de sumas y de diferencias.

Sumas						
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Diferencias						
–	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

La suma es mayor que 7 en 15 de los 36 casos posibles → Gana Pedro.
La diferencia es menor que 2 en 16 de los 36 casos → Gana Pablo.
Por tanto, no es un juego equitativo. Pablo tiene mayor probabilidad de ganar que Pedro.

13. En una bolsa hay diez bolas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Si se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números:
a) Escribe todos los sucesos elementales que forman el suceso "la primera bola extraída es un 5".
b) ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado sea mayor que 59?
d) ¿Y la probabilidad de que termine en 3?
Solución:
a) Los sucesos elementales son:
50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59 → En total hay 9 sucesos elementales; el suceso 55 no puede darse, pues no hay reemplazamiento.

b) El primer número (cifra de las decenas) puede ser cualquiera de los 10 de partida (bolas del 0 al 9); el segundo número (cifra de las unidades) será cualquiera de los nueve restantes.
En total, 10 × 9 = 90. (Hay 9 números en cada una de las 10 "decenas").
Este número se corresponde con las variaciones de 10 elementos tomados 2 a 2:

$V_{10,2}=10\cdot 9=90$.

c) Hay 36 números mayores que 59: los correspondientes a las "decenas" 6n, 7n, 8n y 9n.

Por tanto: $P(mn > 59) = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$.

d) Uno de cada diez números termina en 3, pues hay 10 terminaciones posibles:

$P(m3) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$.

14. De una urna que contiene 10 bolas blancas y 8 negras se hacen dos extracciones sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de sacar:
a) Dos bolas blancas.
b) Solo una negra.
c) Del mismo color.
Halla las mismas probabilidades si las extracciones se hicieran con reemplazamiento.
Solución:
Sin reemplazamiento:
1) Utilizando el principio de numeración:
El número de extracciones posibles es 18 · 17: la primera bola puede ser cualquiera de las 18 de la urna; la 2ª, cualquiera de las 17 que quedan tras extraer la 1ª.
a) Los casos favorables al suceso "dos bolas blancas" son 10 · 9.
Por tanto, $P(BB) = \frac{10 \cdot 9}{18 \cdot 17} = \frac{5}{17}$.
b) El suceso solo una negra es {*BN*, *NB*}.
Los casos *BN* son 10 · 8; los caso *NB*, 8 · 10. En total 160.
Luego, $P(NB, BN) = \frac{160}{18 \cdot 17} = \frac{80}{153}$.
c) Del mismo color es el suceso {*BB*, *NN*}, que es el contrario de {*BN*, *NB*}. Por tanto:

P(del mismo color)) = $1 - \frac{80}{153} = \frac{73}{153}$.

2) Aplicando la probabilidad condicionada:

a) $P(BB) = P(1^o B) \cdot P(2^a B / 1^a B) = \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} = \frac{5}{17}$.

b) $P(NB, BN) = 2 \cdot P(NB) = 2 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} = \frac{80}{153}$.

c) Son del mismo color cuando no hay una banca y una negra (caso anterior); por tanto:

P(del mismo color)) = $1 - \frac{80}{153} = \frac{73}{153}$.

Con reemplazamiento:

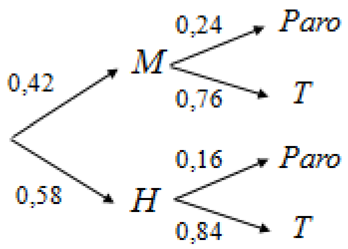
a) $P(BB) = \frac{10}{18} \cdot \frac{10}{18} = \frac{25}{81}$.

b) $P(NB, BN) = 2 \cdot P(NB) = 2 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{10}{18} = \frac{40}{81}$.

c) P(del mismo color)) = $1 - \frac{40}{81} = \frac{41}{81}$.

15. El 42 % de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24 % de las mujeres y el 16 % de los hombres están en el paro. Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar:
a) Esté en el paro y sea hombre.
b) Esté en paro.
b) Sea hombre si está en paro.
Solución:
Para la población activa considerada, sean los sucesos:
M: mujer; *H*: hombre; *Paro*: estar en paro.

Con los datos del problema puede hacerse un diagrama de árbol como el siguiente.



a) $P(Paro \cap H) = P(H) \cdot P(Paro/H)$ = 0,58 · 0,16 = 0,0928.

b) Como no se especifica si es hombre o mujer, la probabilidad de que una persona esté en paro es:

$$P(Paro) = P(M) \cdot P(Paro/M) + P(H) \cdot P(Paro/H) \Rightarrow$$

$$P(Paro) = 0,42 \cdot 0,24 + 0,58 \cdot 0,16 = 0,1936.$$

Esta fórmula se conoce como de probabilidad total.

c) Por la probabilidad condicionada:

$$P(H/Paro) = \frac{P(H \cap Paro)}{P(Paro)} = \frac{P(H) \cdot P(Paro/H)}{P(Paro)} = \frac{0,58 \cdot 0,16}{0,1936} = \frac{0,0928}{0,1936} \approx 0,48.$$

La fórmula anterior se llama de Bayes.
(Sin necesidad de utilizar la fórmula de Bayes: por cada 0,1936 parados, 0,0928 son hombres)

→ También puede hacerse una tabla de contingencia, partiendo, por ejemplo, de 10000 personas activas.

Personas Activas (10000)		En paro
Mujeres	42 % → 4200	24 % → 1008
Hombres	58 % → 5800	16 % → 928
Total	10000	1936

a) $P(Paro \cap H) = \frac{928}{10000} = 0,0928$.

b) $P(H/Paro) = \frac{928}{1936} \approx 0,48$.

16. Un examen de respuesta múltiple consta de 100 preguntas, cada una con 4 opciones, una de ellas correcta y erróneas las otras tres. Cada respuesta acertada suma un punto, la respuesta en blanco suma 0; pero las respuestas erróneas restan.
a) ¿Cuánto debe restarse por cada uno de los fallos para que el examen sea equitativo?
b) ¿Qué calificación obtendrá un alumno que acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco?
Solución:
a) La respuesta puede enfocare como sigue:
Si cada pregunta tiene 4 opciones, de las que solo una es verdadera, si se responde al azar, la probabilidad de acertar será $\frac{1}{4}$; y la de fallar, $\frac{3}{4}$.
Por tanto, cabe esperar que de las 100 preguntas del examen: acertará 25; y fallará, 75.
Su puntuación, que debe ser 0, es el resultado de la suma de $25 \cdot 1 - 75 \cdot x$, siendo x lo que hay restar por cada fallo.
Luego:

$25 \cdot 1 - 75 \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Por cada fallo hay que restar 1/3.

Nota: Este problema es un ejemplo de los llamados "juegos de suma 0", en los que todos los jugadores tienen la misma posibilidad de ganar y de perder. Nadie juega con ventaja.
En estos juegos la esperanza matemática vale 0.
Recuerda que la esperanza matemática, la media de una distribución, se calcula mediante la expresión: $\mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$.
En este caso hay dos opciones:

Acierto: suma $x_1 = 1$, con $p_1 = \frac{1}{4}$; fallo : suma x_2, con $p_2 = \frac{3}{4}$.

Como $x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 = 0 \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{4} + x_2 \cdot \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}$.

b) Si un alumno acierta 67 peguntas, falla 21 y deja 12 en blanco, su calificación será de :

$$67 \cdot 1 - 21 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot 0 = 67 - 7 = 60 \text{ puntos.}$$

17. Un examen consta de 10 preguntas del tipo verdadero/falso. Se aprueba con 8 o más preguntas acertadas. Si todas las preguntas se responden al azar, ¿qué probabilidad hay de aprobar?
Solución:
Se trata de una distribución binomial: $B(10, 0,5)$.

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= \binom{10}{8} \cdot (0,5)^8 \cdot (0,5)^2 + \binom{10}{9} \cdot (0,5)^9 \cdot (0,5) + \binom{10}{10} \cdot (0,5)^{10} = (45 + 10 + 1) \cdot (0,5)^{10} = 0,0546875 .$$

18. En un Centro Comercial el 35 % de los consumidores utiliza el coche para hacer la compra. Si se eligen al azar 7 consumidores que hayan realizado la compra en dicho Centro Comercial, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos hayan ido en coche a comprar?
Solución:
El número de usuarios que utilizan el coche para hacer la compra se puede estudiar como una variable binomial $B(7, 0,35)$.

$$P(X = 3) = \binom{7}{3} 0,35^3 \cdot 0,65^4 = 35 \cdot 0,00765... \approx 0,2679 .$$

19. Se consideran 1000 familias con 3 hijos.
a) ¿En cuántas de ellas puede esperarse que haya exactamente 2 chicas?
b) ¿Y en cuántas al menos una chica? (Supón iguales la probabilidad de nacimiento de niña o niño, 0,5).
Solución:
El número de chicas en familias de 3 hijos se distribuye $B(3, 0,5)$.
Para una familia, la probabilidad de dos chicas es:

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5) = 6 \cdot (0,5)^4 = 0,375 .$$

Por tanto, el número esperado de familias con 2 chicas entre las 1000 familias consideradas será:
1000 · 0,375 = 375.

Para una familia: P("al menos una chica") = 1 – P(ninguna chica) = 1 – $P(X = 0)$ = 1 – 0,125 = 0,875.
Para mil familias: 1000·0,875 = 875 tendrán al menos una chica.

20. Un laboratorio farmacéutico ha comprobado que un 40 % de las personas que toman un analgésico sufren efectos secundarios leves. De 5 usuarios, halla la probabilidad de que sufran efectos secundarios:

a) Más de 3. b) Al menos 2.

Solución:

El número (X) de usuarios con efectos secundarios se distribuye según la binomial $B(5,\ 0{,}4)$.

Por tanto:

a) $P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\cdot(0,4)^4\cdot(0,6)+\binom{5}{5}\cdot(0,4)^5$ = 0,0768 + 0,01024 = 0,08704.

b) Al menos 2 son los casos X = 2, 3, 4 y 5. Como su contrario es X = 0 y 1 entonces:

$$P(X\geq 2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)\right)=1-\binom{5}{0}\cdot(0,4)^0\cdot(0,6)^5-\binom{5}{1}\cdot(0,4)\cdot(0,6)^4=$$

= 1 – 0,07776 – 0,2592 = 0,66304.

21. En un proceso de fabricación se producen un 5 % de piezas defectuosas. Si se examinan 6 de ellas al azar, qué probabilidad existe de que:

a) Haya a lo sumo 4 defectuosas. b) Haya una o dos defectuosas.

Solución:

El número de defectuosas, X, se distribuye $B(6,\ 0{,}05)$.

a) $P(X\leq 4)=1-P(X=5)-P(X=6)=1-\binom{6}{5}\cdot(0,05)^5\cdot(0,95)-\binom{6}{6}\cdot(0,05)^6=$

= 1 – 0,00000148 – 0,0000000156 $\approx$ 1.

b) $P(X=1)+P(X=2)=\binom{6}{1}\cdot(0,05)\cdot(0,95)^5-\binom{6}{2}\cdot(0,05)^2\cdot(0,95)^4$ = 0,2321 + 0,0305 = 0,2626.

22. Si se lanzan al azar 6 monedas equilibradas, calcula la probabilidad de obtener:

a) Al menos una cara. b) Dos caras y cuatro cruces. c) Tres caras y tres cruces.

Solución:

Lanzar 6 monedas a la vez es el experimento equivalente a lanzar 6 veces consecutivas la misma moneda. Como cada moneda presentas 2 resultados (C y X), el total de casos posibles será $VR_{2,6}=2^6=64$.

a) “Al menos una cara” es el suceso contrario de “ninguna cara” = “las 6 son cruces”. Este suceso solo puede darse de una forma: *XXXXXX*.

Por tanto, $P\left(\text{al menos 1 cara}\right)=1-P\left(6\text{ cruces}\right)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$.

b) Los casos favorables a 2 caras y 4 cruces (*CCXXXX*, *CXCXXX*, …) son las combinaciones de 6 elementos tomados 2 a 2 (dos caras); o también las combinaciones de 6 elementos tomados 4 a 4 (cuatro cruces). Su número es $C_{6,2}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15\rightarrow$ Observa que $C_{6,2}=\binom{6}{2}=\binom{6}{4}=C_{6,4}$.

Por tanto, $P\left(2C,\ 4X\right)=\frac{15}{64}$.

c) Los casos favorables a 3 caras y 3 cruces (*CCCXXX*, *CCXCXX*, …) son las combinaciones de 6 elementos tomados 3 a 3.

Su número es $C_{6,3}=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20 \to$ Con calculadora: 6 $\boxed{\text{nCr}}$ 3 $\boxed{=}$ 20.

Por tanto, $P(3C,\ 3X)=\frac{20}{64}$.

Nota: También puede resolverse recurriendo a la distribución binomial, $B(6, 1/2)$.
Si X es la variable que el número de cruces:

a) $P(X>0)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$.

b) $P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$.

c) $P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{64}$.

23. Cuatro personas de edades y estado de salud semejantes, han contratado una póliza de vida. Las tablas de mortalidad prevén un 0,7 de probabilidad de que esos asegurados vivan dentro de 25 años. Encuentra la probabilidad de que dentro de 25 años:
a) Vivan los 4. b) No viva ninguno. c) El número medio de supervivientes.
Solución:
El número de supervivientes se ajusta a una binomial: $B(4, 0{,}7)$.
La probabilidad de éxito (seguir vivo dentro de 25 años) es $p = 0{,}7$; la de fracaso (morir antes), $q = 0{,}3$.

a) $P(X=4)=\binom{4}{4}\cdot(0{,}7)^4 = 0{,}7^4 = 0{,}2401$.

b) $P(X=0)=\binom{4}{0}\cdot(0{,}7)^0\cdot(0{,}3)^4 = 0{,}3^4 = 0{,}0081$.

c) La media es $4 \cdot 0{,}7 = 2{,}8$.

24. Un examen de preguntas con respuestas múltiples, consta de 8 preguntas con 4 opciones de contestación, de las que solo una es correcta. Si un alumno respondiera al azar halla la probabilidad de que:
a) Responda correctamente a 6. b) Responda al menos 6 correctamente.
c) El número medio de respuestas acertadas.
Solución:
La variable que cuenta el número de respuestas correctas, es una binomial $B(8, 1/4) = B(8, 0{,}25)$.

a) $P(X=6)=\binom{8}{6}0{,}25^6\cdot 0{,}75^2=28\cdot 0{,}0001373...\approx 0{,}003845$.

b) Responder "al menos" 6, es equivalente a responder 6, 7 u 8 preguntas correctamente, o sea,
$P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8) = 0{,}003845 + 0{,}000366 + 0{,}000015 = 0{,}00426$.

c) El número medio de respuestas correctas será: $8\cdot 0{,}25 = 2$.

25. Un examen consta de 8 preguntas con 3 posibles respuestas cada una, de las que sólo una de ellas es correcta. Si un estudiante responde al azar marcando las respuestas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que:
a) No acierte ninguna respuesta correcta. b) Acierte 6 o más preguntas.

Solución:

Si se contesta al azar, la probabilidad de acertar $p=\frac{1}{3}$; la de fallar, $q=\frac{2}{3}$.

Se trata de una distribución de probabilidad binomial, $B\left(8,\ \frac{1}{3}\right)$.

a) $P(X=0)=\binom{8}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^8=\frac{256}{6561}=0,039$.

b) $P(X\geq 6)=P(X=6)+\mathrm{P}(X=7)+P(X=8)=$

$$=\binom{8}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\binom{8}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+\binom{8}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^0=28\cdot\frac{4}{6561}+8\cdot\frac{2}{6561}+\frac{1}{6561}=\frac{129}{6561}=0,0197\ .$$

26. En España, en el año 2020, aproximadamente el 15 % de la población había nacido en algún país extranjero. Si se elige una muestra aleatoria de *n* individuos y se desea estimar cuántos de ellos han nacido en el extranjero, tal experimento puede estudiarse como una *B*(*n*, 0,15).
En el caso de que el tamaño muestral sea *n* = 8, halla la probabilidad de que:
a) Ninguno haya nacido en el extranjero.
b) Al menos uno de ellos sea de origen extranjero.
c) Exactamente 5 de ellos lo sean.
d) Los 8 hayan nacido en el extranjero.
Solución.
La distribución de probabilidad es una binomial *B*(8, 0,15): *n* = 8; *p* = 0,15; *q* = 0,85.
Si la variable aleatoria *X* mide el número de nacidos en el extranjero, entonces:

a) $P(X=0)=\binom{8}{0}0,15^0\cdot 0,85^8\approx 1\cdot 0,2725=0,2725$.

b) "Al menos uno" es el suceso contrario de "ninguno". por tanto:
$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0,2725=0,7275$

c) $P(X=5)=\binom{8}{5}0,15^5\cdot 0,85^3=56\cdot 0,0000759375\cdot 0,614125\approx 0,0026$.

d) $P(X=5)=\binom{8}{8}0,15^8\cdot 0,85^0=1\cdot 0,000000256\approx 0$.

27. a) En un grupo de 20 personas, ¿de cuántas maneras puede seleccionarse a 3 de ellas?
b) ¿De cuántas maneras distintas pueden seleccionarse 6 preguntas de examen entre 10 propuestas?
c) ¿De cuántas maneras distintas pueden repartirse las 40 cartas de una baraja entre 4 jugadores?
Solución:
a) Si las personas son {A, B, C, D, …, M, N, …}, algunas de ternas son ABC, ABD, AMN, …; la terna ABC es la misma que BAC: no cambia si se colocan en distinto orden, pues son las mismas tres personas. Por tanto, se trata de un problema de combinaciones.
En total, el número de ternas es $C_{20,3}$:

$$C_{20,3}=\frac{V_{20,3}}{P_3}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}=1140\rightarrow \text{calculadora } \boxed{40C10}\ \boxed{=}.$$

b) Si en un examen hay que contestar 6 preguntas entre 10 propuestas, las respuestas pueden darse de combinaciones de 10 preguntas tomadas 6 a 6 maneras distintas, pues el orden de contestación de las preguntas no cambia el modelo de examen. Dos exámenes son diferentes solo cuando contienen alguna pregunta diferente.
Por tanto, el total de posibles respuestas será,

$$C_{10,6}=\binom{10}{6}=\frac{10!}{6!(10-6)!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=10\cdot3\cdot7=210.$$

c) Cada uno de los cuatro jugadores recibirá 10 cartas; como el orden en recibir las cartas no altera la jugada, el reparto se puede hacer de combinaciones de 40 elementos tomados 10 a 10 maneras diferentes. Su número es

$$C_{40,10}=\binom{40}{10}=\frac{40!}{10!\cdot30!}=847660528. \quad \to \text{Con la calculadora } \boxed{40C10}\ \boxed{=}.$$

28. Se toman, al azar tres cartas de una baraja española de 40 cartas. Halla la probabilidad de que:
a) La tres sean reyes;
b) Exactamente una sea rey.
Solución:
El orden en recibir las tres cartas no altera la jugada en cuestión. Da lo mismo recibir el rey de copas, el 4 de oros y la sota de bastos, en ese orden que en cualquier otro.
Por tanto, el número de jugadas diferentes es:

$$C_{40,3}=\binom{40}{3}=\frac{40\cdot39\cdot38}{3\cdot2\cdot1}=9880. \quad (\text{Con la calculadora } \boxed{40C3}\ \boxed{=}\ 9880).$$

a) Como hay 4 reyes, se pueden recibir 3 de ellos de $C_{4,3}=\binom{4}{3}=\frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1}=4$ maneras diferentes.

Luego, $P(3\text{ reyes})=\frac{4}{9880}\approx0{,}0004$.

b) El rey puede ser cualquiera de los 4 de la baraja; las otras 2 cartas del trio deben ser de las 36 que no son reyes, que pueden recibirse de $C_{36,2}=\binom{36}{2}=\frac{36\cdot35}{2\cdot1}=630$ maneras distintas.

Así pues, hay 4 · 630 = 2520 jugadas posibles con exactamente un rey.

Luego, $P(\text{exactamente 1 rey})=\frac{2520}{9880}\approx0{,}2551$.

29. En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 2 escolares al azar, halla la probabilidad de que:
a) Sean 2 niños $\to$ suceso *A*. b) Sean 2 niñas $\to$ suceso *B*.
c) Sean una niña y un niño $\to$ suceso *C*.
Solución:
Aplicando el principio multiplicativo
El suceso de elegir dos escolares está formado por 16 · 15 (= 240) casos distintos: la primera elección puede hacerse entre 16; la segunda, entre los 15 restantes.
a) Dos niños pueden elegirse de 10 · 9 (= 90) formas distintas.

Por tanto, $P(A)=\frac{90}{240}=0{,}375$.

b) Dos niñas pueden elegirse de 6 · 5 (= 30) formas distintas.

Luego, $P(B)=\frac{30}{240}=0{,}125$.

c) Es el suceso contrario de los dos anteriores.

Por tanto, $P(C)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{90}{240}-\frac{30}{240}=\frac{120}{240}=0{,}5$.

Aplicando combinatoria

El número de parejas posibles son las combinaciones de 16 elementos (6 + 10) tomados 2 a 2.

$$C_{16,2}=\binom{16}{2}=\frac{16\cdot 15}{2}=120.$$

a) Los casos favorables a que los elegidos sean 2 niños son las combinaciones de 10 elementos tomados 2 a 2 $\to$ $C_{10,2}=\binom{10}{2}=\frac{10\cdot 9}{2}=45$.

Por tanto, $P(A)=\frac{45}{120}=0{,}375$.

b) Los casos favorables a que las elegidas sean 2 niñas (entre las 6 que hay) son las combinaciones de 6 elementos tomados 2 a 2 $\to$ $C_{6,2}=\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$.

Luego, $P(B)=\frac{15}{120}=0{,}125$.

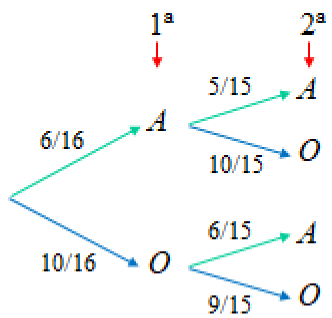
c) La elección de una niña y un niño puede hacerse de 60 maneras distintas: con cada una de las 6 niñas emparejarse cada uno de los 10 niños.

Por tanto, $P(C)=\frac{60}{120}=0{,}5$.

30. Resuelve el problema anterior con la ayuda de un diagrama de árbol.

Solución:

Si se designa por *A* el suceso elegir una niña y por *O* el suceso niño, se puede confeccionar el diagrama de árbol adjunto. (En cada rama se indica la probabilidad de cada posible suceso).



En la primera elección (1ª) hay 16 alumnos de los que 6 son chicas y 10 son chicos. Luego: $P(A)=\frac{6}{16}$ y $P(O)=\frac{10}{16}$.

La segunda elección (2ª) se hace entre 15 alumnos: 5 niñas y 10 niños, o 6 niñas y 9 niños, dependiendo de la primera elección.

a) Dos niños es el suceso *OO*. Su probabilidad es $P(OO)=P(1^{o}O)\cdot P(2^{o}O)=\frac{10}{16}\cdot\frac{9}{15}=\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$.

b) Dos niñas es el suceso *AA*. Su probabilidad es $P(AA)=P(1^{o}A)\cdot P(2^{o}A)=\frac{8}{16}\cdot\frac{7}{15}=\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$.

c) Una niña y un niño es el suceso {*AO*, *OA*}. Su probabilidad es:

$$P(AO)=P(1^{o}A)\cdot P(2^{o}O)+P(1^{o}O)\cdot P(2^{o}A)=\frac{8}{16}\cdot\frac{10}{15}+\frac{10}{16}\cdot\frac{8}{15}=\frac{60}{120}=\frac{4}{8}=0{,}5.$$

31. Un examen de oposición consiste en desarrollar por escrito un tema de un total de 50. El tribunal elige al azar 2 temas y cada candidato debe contestar correctamente uno de los dos.
a) Halla la probabilidad de que un candidato apruebe la oposición si se sabe solo 35 temas.
b) Si los opositores tienen que contestar correctamente a los dos temas elegidos, ¿cuál será la probabilidad de aprobar que tiene otro candidato que se sabe 40 de los 50 temas?
Solución:
a) Hay $C_{50,2}$ maneras distintas de elegir 2 temas entre 50.

El candidato suspende cuando los 2 temas elegidos están entre los 15 que no se sabe. Esto puede suceder de $C_{15,2}$ maneras distintas.

Por tanto, la probabilidad de suspender será: $P(S)=\frac{C_{15,2}}{C_{50,2}}=\frac{\frac{15\cdot14}{2}}{\frac{50\cdot49}{2}}=\frac{210}{2450}=0,0857$.

Luego, la probabilidad de tiene de aprobar es: $P(A)=1-P(S)=1-0,0857=0,9143$.

b) El candidato aprobará cuando los 2 temas elegidos estén entre los 40 que se sabe. Esto sucede de $C_{40,2}$ maneras distintas.

Por tanto, la probabilidad de aprobar será: $P(A)=\frac{C_{40,2}}{C_{50,2}}=\frac{\frac{40\cdot39}{2}}{\frac{50\cdot49}{2}}=\frac{1560}{2450}=0,6367$.